Exercice 6.1. Une *algèbre de Lie* est un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) muni d'une application bilinéaire (notée $[\cdot,\cdot]$) antisymétrique et vérifiant l'identité de Jacobi.

(a) Montrer qu'à toute algèbre $\mathcal{A}$ est associée une algèbre de Lie $(\mathcal{A},[\cdot,\cdot])$ où le crochet est défini par $[A,B] := AB - BA$.

(b) En particulier $M_n(\mathbb{R})$ est une algèbre de Lie (où $[A,B] := AB-BA$). Montrer que l'ensemble $\mathfrak{so}_n \subset M_n(\mathbb{R})$ des $n\times n$ matrices antisymétriques est une sous-algèbre de Lie et calculer sa dimension.

(c) Montrer que $(\mathbb{R}^3,\times)$ (où $\times$ désigne le produit vectoriel) est une algèbre de Lie et qu'elle est isomorphe à l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}_3$.

Exercice 6.2. Notons $\mathfrak{g}$ l'espace vectoriel des champs de vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ qui sont combinaisons linéaires de

$$X := y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}, \quad Y := z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}, \quad Z := x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}.$$

Montrer que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie et trouver sa dimension. Puis montrer qu'elle est isomorphe à l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}_3$ de l'exercice précédent.

Exercice 6.3. Calculer la métrique du plan hyperbolique en coordonnées polaires Riemanniennes.
(Indication: Se placer dans le modèle du disque de Poincaré.)

Exercice 6.4. Soit N une sous-variété plongée et fermée dans une variété Riemannienne M.
Pour tout point $p \in M\backslash N$, on défini la distance de p à N par

$$d(p,N) := \inf\{d(p,x) | x \in N\}.$$

Si $q \in N$ est un point tel que $d(p,q) = d(p,N)$, et γ est une géodésique minimisante entre p et q, montrer que γ intersecte N de manière orthogonale.

Exercice 6.5. (Naturalité de l'exponentielle)
Soit $\varphi : M \to N$ une isométrie entre deux variétés Riemanniennes. Montrer que le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccc} T_pM & \xrightarrow{d_p\varphi} & T_{\varphi(p)}N \\ \downarrow{\scriptstyle \exp_p} & & \downarrow{\scriptstyle \exp_{\varphi(p)}} \\ M & \xrightarrow{\varphi} & N \end{array}$$

Exercice 6.6. Soit (M,g) est une variété riemannienne connexe et soient φ et ψ deux isométries de M telle qu'il existe un point $p \in M$ pour lequel

$$\varphi(p) = \psi(p) \quad \text{et} \quad d_p\varphi = d_p\psi.$$

Montrer que φ et ψ coïncident partout.