**Exercice 1.**

**a)** $a^2m + abm - 3am - 3bm = am(a+b) - 3m(a+b) = (a+b)(am-3m) = m(a+b)(a-3)$

**b)** $m + n + p - am - an - ap = m + n + p - a(m+n+p) = (1-a)(m+n+p)$

**c)** $ax + x - a - 1 = x(a+1) - 1(a+1) = (a+1)(x-1)$

**d)** $a^3 + a^2 + a + 1 = a^2(a+1) + 1(a+1) = (a+1)(a^2+1)$

**e)** $6x^2 + xy + 18xz + 3yz = x(6x+y) + 3z(6x+y) = (6x+y)(x+3z)$

**f)** $20xy + 4y - 5x - 1 = 4y(5x+1) - 1(5x+1) = (5x+1)(4y-1)$

**g)** $6x^2 - 5xz - 6x + 5z = 6x(x-1) - 5z(x-1) = (x-1)(6x-5z)$

**h)** $y^3 - y - y^2 + 1 = y(y^2-1) - 1(y^2-1) = (y^2-1)(y-1) = (y+1)(y-1)(y-1) = (y+1)(y-1)^2$

**i)** $a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 2ab(a+b) = (a+b)(a^2 - ab + b^2) + 2ab(a+b) = (a+b)(a^2 - ab + b^2 + 2ab) = (a+b)(a^2 + ab + b^2)$

**j)** $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 = 1(1 - x + x^2) - x^3(1 - x + x^2) = (1 - x + x^2)(1 - x^3) = (1 - x + x^2)(1-x)(1 + x + x^2)$

**k)** $1 + b + b^2 + b^3 + b^4 + b^5 = 1(1 + b + b^2) + b^3(1 + b + b^2) = (1 + b + b^2)(1 + b^3) = (1 + b + b^2)(1+b)(1 - b + b^2)$

**l)** $x^2 - xy + xz - x + y - z = x(x - y + z) - 1(x - y + z) = (x - y + z)(x - 1)$

**m)** $2x^2 + 12xy + 18y^2 - 8 = 2(x^2 + 6xy + 9y^2 - 4) = 2((x+3y)^2 - 4) = 2(x + 3y - 2)(x + 3y + 2)$

**Exercice 2.**

**a)**

| | $4$ | $-10$ | $11$ | $-5$ |
|---|---|---|---|---|
| $1$ | | $4$ | $-6$ | $5$ |
| | $4$ | $-6$ | $5$ | $0$ |

Ainsi $4x^3 - 10x^2 + 11x - 5 = (x-1)(4x^2 - 6x + 5)$.

**b)**

| | $9$ | $1$ | $-1$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-2$ | | $-18$ | $34$ | $-66$ | $130$ |
| | $9$ | $-17$ | $33$ | $-65$ | $132$ |

Ainsi $9x^4 + x^3 - x^2 + x + 2 = (x+2)(9x^3 - 17x^2 + 33x - 65) + 132$.

**c)**

| | $6$ | $-7$ | $8$ | $-5$ |
|---|---|---|---|---|
| $-\frac{2}{3}$ | | $-4$ | $\frac{22}{3}$ | $-\frac{92}{9}$ |
| | $6$ | $-11$ | $\frac{46}{3}$ | $-\frac{137}{9}$ |

Ainsi $6x^3 - 7x^2 + 8x - 5 = (x + \frac{2}{3})(6x^2 - 11x + \frac{46}{3}) - \frac{137}{9}$.

**d)**

| | $10$ | $-19$ | $-17$ |
|---|---|---|---|
| $\frac{5}{2}$ | | $25$ | $15$ |
| | $10$ | $6$ | $-2$ |

Ainsi $10x^2 - 19x - 17 = (x - \frac{5}{2})(10x + 6) - 2$.

**Exercice 3.** Dans chaque cas il s'agit d'effectuer la division du premier polynôme par le second et d'égaler le reste à 0. Pour le 1er cas, on présente 2 résolutions possibles. Pour les cas 2 et 3, on utilisera le schéma de Horner pour effectuer la division, et, au quatrième cas, on effectuera une division euclidienne (seule méthode possible ici, puisque le diviseur n'est pas de la forme $x - k$ avec $k \in \mathbb{R}$).

**a) Méthode avec le "truc du reste".** Par un corollaire du cours, le reste de la division de $f(x)$ par $x - k$ vaut $f(k)$. Ici, $k = 3$, et le reste vaudra donc $f(k) = 3^2 + a \cdot 3 + 12 = 21 + 3a$. La donnée demande que ce reste soit nul, c'est-à-dire $21 + 3a = 0$, soit $a = -7$. Pour obtenir le quotient de la division de $f(x) = x^2 - 7x + 12$ par $x - 3$, on peut utiliser Horner :

| | $1$ | $-7$ | $12$ |
|---|---|---|---|
| $3$ | | $3$ | $-12$ |
| | $1$ | $-4$ | $0$ |

On obtient donc le quotient $q(x) = x - 4$. Un autre méthode possible ici est de directement factoriser $f(x)$ avec Viète $f(x) = x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$, d'où l'on déduit que le quotient de la division de $f(x)$ par $x - 3$ est $q(x) = x - 4$.

**Méthode avec Horner seulement.** On établit le schéma de Horner pour la division de $f(x) = x^2 + ax + 12$ par $x - 3$ :

| | $1$ | $a$ | $12$ |
|---|---|---|---|
| $3$ | | $3$ | $3a+9$ |
| | $1$ | $a+3$ | $3a+21$ |

Le reste est égal à $3a + 21$, en égalant ce reste à 0, on a $3a = -21$ et donc $a = -7$. Dans ce cas, le quotient est $q(x) = x - 4$.

**b)**

| | $1$ | $a$ | $15$ |
|---|---|---|---|
| $-3$ | | $-3$ | $-3a+9$ |
| | $1$ | $a-3$ | $-3a+24$ |

Le reste est égal à $-3a + 24$, en l'égalant à 0 on obtient $3a = 24$ et donc $a = 8$. Dans ce cas, le quotient est $q(x) = x + 5$.

**c)**

| | $1$ | $a$ | $19$ | $-12$ |
|---|---|---|---|---|
| $1$ | | $1$ | $a+1$ | $a+20$ |
| | $1$ | $a+1$ | $a+20$ | $a+8$ |

Le reste est égal à $a + 8$, en l'égalant à 0 on obtient $a = -8$. Dans ce cas, le quotient est $q(x) = x^2 - 7x + 12$ (soit $q(x) = (x-3)(x-4)$ sous sa forme factorisée).

**d)**

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
x^6 & +x^4 & +ax^3 & +bx^2 & -x & -1 & x^3 \quad +x \quad +1 \\
\cline{7-7}
-x^6 & -x^4 & -x^3 & & & & x^3 \ +(a-1) \\
\cline{1-3}
 & & (a-1)x^3 & & & & \\
 & & -(a-1)x^3 & & -(a-1)x & -(a-1) & \\
\cline{3-6}
 & & & bx^2 & -ax & -a &
\end{array}$$

Le reste est le polynôme $r(x) = bx^2 - ax - a$ qui est nul précisément si $b = 0$ *et* $a = 0$ (si l'un de ces paramètres n'est pas nul, $r(x)$ ne sera pas le polynôme constant 0). Dans ce cas, le quotient est $q(x) = x^3 - 1$.

**Exercice 4.** Nous allons à chaque fois regarder si $-a$ ou $-2a$ sont des racines des polynômes donnés.

**a)** Pour le premier cas, $f(x) = x^5 + a^5$, pour que $f(x)$ soit divisible par $x + a$, il faut et il suffit que $-a$ soit une racine de $f(x)$. Or $f(-a) = -a^5 + a^5 = 0$, donc $-a$ est une racine de $f(x)$ et $f(x)$ et ainsi divisible par $x + a$.

**b)** $f(x) = x^5 - a^5$, $f(-a) = -a^5 - a^5 = -2a^5 \neq 0$, ainsi si $a \neq 0$, $f(x)$ n'est pas divisible par $x + a$.

**c)** $f(x) = x^6 - 12a^2x^4 - 75a^5x - 22a^6$, $f(-2a) = 64a^6 - 192a^6 + 150a^6 - 22a^6 = 0$, ainsi $f(x)$ est divisible par $x + 2a$.

**d)** $f(x) = 5x^4 + 7ax^3 - 4a^2x^2 + 2a^3x - 4a^4$, $f(-2a) = 80a^4 - 56a^4 - 16a^4 - 4a^4 - 4a^4 = 0$, ainsi $f(x)$ est divisible par $x + 2a$.

**Exercice 5.** Pour que le polynôme $f(x) = (x+1)^k - (x-1)^k$ soit divisible par $x$, il faut et il suffit que 0 soit une racine de $f(x)$ (résultat du cours). Si $k$ est impair, le dernier terme du polynôme $(x+1)^k$ quand on le développera, sera $1^k = 1$, tandis que le dernier terme du polynôme $(x-1)^k$ sera $(-1)^k = -1$ et donc en soustrayant le deuxième polynôme du premier, il restera le terme constant 2, ainsi 0 ne pourra pas être racine de $f(x)$. Par contre, si $k$ est pair $(-1)^k = 1$ et donc en soustrayant le deuxième polynôme du premier, les deux termes constants s'annuleront et le polynôme résultant de la soustraction n'aura pas de terme constant. Ainsi si $k$ est pair, 0 sera toujours une racine de $f(x)$ et donc $f(x)$ sera divisible par $x$.

**Exercice 6.** Le reste de la division de $f(x)$ par $x - 7$ vaut $f(7)$ ; cette valeur peut donc être calculée rapidement avec un schéma de Horner :

| | $-10$ | $73$ | $-20$ | $0$ | $-289$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $7$ | | $-70$ | $21$ | $7$ | $49$ |
| | $-10$ | $3$ | $1$ | $7$ | $-240$ |

donc $f(7) = -240$.

**Exercice 7.**

**a)** $x^3+2x^2+x = x(x^2+2x+1) = x(x+1)^2$

**b)** $2a^6-6a^4+6a^2-2 = 2(a^6-1)-6a^2(a^2-1) = 2\left[(a^2)^3-1\right]-6a^2(a^2-1) = 2(a^2-1)(a^4+a^2+1)-6a^2(a^2-1) = 2(a^2-1)(a^4+a^2+1-3a^2) = 2(a^2-1)(a^4-2a^2+1) = 2(a+1)(a-1)(a^2-1)^2 = 2(a+1)(a-1)\left[(a+1)(a-1)\right]^2 = 2(a+1)^3(a-1)^3$

**c)** $54a^6-2 = 2(27a^6-1) = 2\left[(3a^2)^3-1\right] = 2(3a^2-1)(9a^4+3a^2+1) = 2(\sqrt{3}a+1)(\sqrt{3}a-1)(9a^4+3a^2+1)$ ; de plus (bonus !) :
$9a^4+3a^2+1 \overset{\text{compl. carré}}{=} 9a^4+6a^2+1-3a^2 = (3a^2+1)^2-(\sqrt{3}a)^2 = (3a^2+\sqrt{3}a+1)(3a^2-\sqrt{3}a+1)$

**d)** $(x^2-1)^2+4x^2 = x^4-2x^2+1+4x^2 = x^4+2x^2+1 = (x^2+1)^2$

**e)** $xy-9x^3y = xy(1-9x^2) = xy(1-3x)(1+3x)$

**f)** $(ab+a+1)^2-(b+a+1)^2 \overset{\text{dif. 2 carrés}}{=} \left[(ab+a+1)+(b+a+1)\right]\cdot\left[(ab+a+1)-(b+a+1)\right] = (ab+b+2a+2)(ab-b) = (b(a+1)+2(a+1))((a-1)b) = (b+2)(a+1)(a-1)b$

**g)** $(x^2-1)^2-(x+1)(x-1)^3 = (x-1)^2(x+1)^2-(x+1)(x-1)^3 = (x-1)^2(x+1)\left[(x+1)-(x-1)\right] = 2(x-1)^2(x+1)$

**h)** $a^2-2ab-3b^2 = a^2-2ab+b^2-4b^2 = (a-b)^2-4b^2 = (a-b+2b)(a-b-2b) = (a+b)(a-3b)$

**i)** $x(1-y+x)-y = x-xy+x^2-y = x(1+x)-y(x+1) = x(x+1)-y(x+1) = (x+1)(x-y)$

**j)** $x^3-3x^2+9x-27 = x^2(x-3)+9(x-3) = (x-3)(x^2+9)$

**k)** $a^8-256 = \left[(a^4)^2-16^2\right] = (a^4-16)(a^4+16) = (a^2-4)(a^2+4)(a^4+16) = (a-2)(a+2)(a^2+4)(a^4+16)$
et de plus (bonus !) $a^4+16 \overset{\text{compl. carré}}{=} a^4+8a^2+16-8a^2 = (a^2+4)^2-(\sqrt{8}a)^2 = (a^2+2\sqrt{2}+4)(a^2-2\sqrt{2}+4)$

**l)** $b^8-2b^4+1 = (b^4-1)^2 = \left[(b^2-1)(b^2+1)\right]^2 = \left[(b-1)(b+1)(b^2+1)\right]^2 = (b-1)^2(b+1)^2(b^2+1)^2$

**m)** $(x-3)^3+(y-5)^3 = \left[(x-3)+(y-5)\right]\cdot\left[(x-3)^2-(x-3)(y-5)+(y-5)^2\right] = (x+y-8)(x^2-6x+9-xy+5x+3y-15+y^2-10y+25) = (x+y-8)(x^2+y^2-xy-x-7y+19)$

**n)** $x^2+3x-4y^2+6y = x^2-4y^2+3(x+2y) = (x-2y)(x+2y)+3(x+2y) = (x+2y)(x-2y+3)$

**Exercice 8.** On cherche dans chaque cas deux nombres entiers $m$ et $n$ tels que $m+n=b$ et $m\cdot n = a\cdot c$ pour écrire $ax^2+bx+c = a(x+\frac{m}{a})(x+\frac{n}{a})$. La dernière forme donnée est la factorisation dans $\mathbb{Z}[x]$.

**a)** On trouve $m=7$ et $n=-5$, et $x^2+2x-35 = (x+7)(x-5)$.

**b)** On trouve $m=-7$ et $n=5$, et $x^2-2x-35 = (x-7)(x+5)$.

**c)** On ne trouve pas de $m$ et de $n$ adéquats ; la raison en est que $\Delta = (-2)^2-4\cdot 1\cdot(-1) = 8$ n'est pas un carré parfait. Avec $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, la formule de factorisation du trinôme donne $x^2-2x-1 = (x-(\frac{2+2\sqrt{2}}{2}))(x-(\frac{2-2\sqrt{2}}{2})) = (x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})$ qui n'est pas dans $\mathbb{Z}[x]$.

**d)** On trouve $m=-6$ et $n=1$, et $3x^2-5x-2 = 3(x-\frac{6}{3})(x+\frac{1}{3}) = 3(x-2)(x+\frac{1}{3}) = (x-2)(3x+1)$.

**e)** On trouve $m=22$ et $n=-3$, et $6x^2+19x-11 = 6(x+\frac{22}{6})(x-\frac{3}{6}) = 6(x+\frac{11}{3})(x-\frac{1}{2}) = (3x+11)(2x-1)$.

**f)** On trouve $m=-47$ et $n=-1$, et $x^2-48x+47 = (x-47)(x-1)$.

**Exercice 9.** Dans ces exercices, quand on ne voit pas rapidement une manière de factoriser le polynôme, il faut trouver des racines. Une astuce consiste à chercher ces racines parmi les diviseurs du terme constant du polynôme que l'on doit factoriser.

**a)** $f(x) = x^3+9x^2+11x-21$, on peut essayer avec $x=-3$, $f(-3) = -27+81-33-21 = 0$, ainsi $f(x)$ se divise par $(x+3)$. Effectuons cette division avec le schéma de Horner

| | 1 | 9 | 11 | −21 |
|---|---|---|---|---|
| −3 | | −3 | −18 | 21 |
| | 1 | 6 | −7 | 0 |

Ainsi $x^3+9x^2+11x-21 = (x+3)(x^2+6x-7) = (x+3)(x-1)(x+7)$.

**b)** $f(x) = x^4+2x^3-16x^2-2x+15$, on peut essayer comme racine $x=3$, ce qui nous donne $f(3)=0$ et donc $f(x)$ est divisible par $(x-3)$, division que l'on effectue par le schéma de Horner.

| | 1 | 2 | −16 | −2 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | | 3 | 15 | −3 | −15 |
| | 1 | 5 | −1 | −5 | 0 |

Ainsi $x^4+2x^3-16x^2-2x+15 = (x-3)(x^3+5x^2-x-5) = (x-3)\left[x^2(x+5)-1(x+5)\right] = (x-3)(x+5)(x^2-1) = (x-3)(x+5)(x-1)(x+1)$.

**c)** $f(x) = x^5 + 3x^4 - 16x - 48 = x^4(x+3) - 16(x+3) = (x+3)(x^4-16) = (x+3)(x^2-4)(x^2+4) = (x+3)(x-2)(x+2)(x^2+4)$.

**d)** $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$, ici on trouve que 1 est une racine de $f(x)$ et donc $f(x)$ est divisible par $x-1$.

| | 1 | −3 | 3 | −3 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 1 | −2 | 13 | −2 |
| | 1 | −2 | 1 | −2 | 0 |

Ainsi $x^4-3x^3+3x^2-3x+2 = (x-1)(x^3-2x^2+x-2) = (x-1)\left[x^2(x-2)+1(x-2)\right] = (x-1)(x-2)(x^2+1)$.

**e)** $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$, ici, en essayant successivement tous les diviseurs de $-6$, on voit que $-1$, 2 et $-3$ sont des racines de $f(x)$, et donc $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x+1)(x-2)(x+3)$.

**f)** $f(x) = x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6$, on trouve que 2 est une racine de $f(x)$ et donc que $f(x)$ est divisible par $x-2$.

| | 1 | −7 | +17 | −17 | +6 |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | | 2 | −10 | 14 | −6 |
| | 1 | −5 | 7 | −3 | 0 |

Ainsi $x^4-7x^3+17x^2-17x+6 = (x-2)(x^3-5x^2+7x-3)$. Maintenant on cherche des racines de $x^3-5x^2+7x-3$, et on trouve que 1 en est une, effectuons la division par Horner :

| | 1 | −5 | 7 | −3 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | 1 | −4 | 3 |
| | 1 | −4 | 3 | 0 |

Ainsi $x^4-7x^3+17x^2-17x+6 = (x-2)(x-1)(x^2-4x+3) = (x-2)(x-1)(x-1)(x-3) = (x-2)(x-1)^2(x-3)$.

**g)**
$$\begin{aligned} f(x) &= 6x^4 + 13x^3 - 13x - 6 = 6(x^4-1) + 13x(x^2-1) = 6(x^2-1)(x^2+1) + 13x(x^2-1) \\ &= (x^2-1)\left[6(x^2+1) + 13x\right] = (x-1)(x+1)(6x^2+13x+6). \end{aligned}$$

Pour chercher les racines du dernier facteur, on peut utiliser Viète ou la formule du trinôme (cette dernière nous donne les racines $-\frac{3}{2}$ et $-\frac{2}{3}$), ainsi $f(x) = 6(x-1)(x+1)(x+\frac{3}{2})(x+\frac{2}{3}) = (x-1)(x+1)(3x+2)(2x+3)$.

**Exercice 10.**

**a)**
$$\begin{aligned} 3x^2 - 13x + 10 &= 3\left(x^2 - \tfrac{13}{3}x + \tfrac{10}{3}\right) = 3\left(x^2 - \tfrac{13}{3}x + \tfrac{169}{36} - \tfrac{169}{36} + \tfrac{120}{36}\right) \\ &= 3\left(\left(x - \tfrac{13}{6}\right)^2 - \tfrac{49}{36}\right) = 3\left(\left(x - \tfrac{13}{6}\right) + \tfrac{7}{6}\right)\left(\left(x - \tfrac{13}{6}\right) - \tfrac{7}{6}\right) \\ &= 3\left(x-1\right)\left(x - \tfrac{10}{3}\right); \end{aligned}$$

**b)**
$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 7 &= x^2 + 6x + 9 - 9 + 7 \\ &= (x+3)^2 - 2 = \left(x + 3 + \sqrt{2}\right)\left(x + 3 - \sqrt{2}\right); \end{aligned}$$

**c)**
$$\begin{aligned} 2x^2 - 2x - 1 &= 2\left(x^2 - x - \tfrac{1}{2}\right) = 2\left(x^2 - x + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\right) \\ &= 2\left(\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{3}{4}\right) = 2\left(\left(x - \tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\left(x - \tfrac{1}{2}\right) - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 2\left(x - \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(x - \tfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \tfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right). \end{aligned}$$

**Exercice 11.**

**a)** Pour le polynôme $f(x) = 2x^2 - 3x - 7$, la formule du trinôme donne $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4\cdot 2\cdot(-7) = 65$, et
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \begin{cases} \frac{3+\sqrt{65}}{4} \\ \frac{3-\sqrt{65}}{4} \end{cases}$$
Ainsi $f(x)$ se factorise comme
$$f(x) = 2\left(x - \tfrac{3+\sqrt{65}}{4}\right)\left(x - \tfrac{3-\sqrt{65}}{4}\right)$$

**b)** Pour le polynôme $g(x) = 3x^2 - 6x + 5$, on observe que le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4\cdot 3\cdot 5 = -24$ est négatif : dans ce cas, $g(x)$ n'a pas de racine réelle, et ne se factorise pas dans $\mathbb{R}[x]$.