Corrigé série 7

Exercice 1 (5 points)

Soit $a \in \mathbb{R}$.

a) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{x-a}{x-a} = 1$

b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^3-a^3}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{(x-a)(x^2+xa+a^2)}{x-a} = 3a^2$

c) Supposons $(x^n)' = nx^{n-1}$ pour un $n > 0$. Alors, avec la formule de la dérivée d'un produit,

$$(x^{n+1})' = (x^n x)' = (x^n)'x + x^n x' = nx^{n-1}x + x^n = (n+1)x^n.$$

Exercice 2 (5 points)

En utilisant une formule trigonométrique et le fait que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1,$$

on a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{\cos(x)-\cos(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{-2\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a} \\ &= -\lim_{x\to a} \sin\left(\frac{x+a}{2}\right) \cdot \lim_{x\to a} \frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}} = -\sin(a).\end{aligned}$$

En utilisant ce résultat et $(\sin(x))' = \cos(x)$, on peut calculer avec la formule de la dérivée d'un quotient,

$$(\tan(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}.$$

Ainsi,

$$(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x).$$

De manière similaire, on trouve

$$(\cot(x))' = \frac{-1}{\sin^2(x)} = -1-\cot^2(x).$$

Le domaine de définition de la fonction cos et de sa dérivée est $\mathbb{R}$.

Le domaine de définition de la fonction tan et de sa dérivée est $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Le domaine de définition celui de la fonctioncot et de sa dérivée est $\mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 3 (5 points)

a) Faux. $f(x) = -x$.

b) Faux. $f(x) = (x - 1/2)^2$.

c) Faux. $f(x) = |x - 1/2|$.

d) Vrai. Soit d donné par l'équation $y = ax$, avec $a \in \mathbb{R}$. La fonction $f(x) = ax$ satisfait à la condition.

e) Vrai. La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ a pour dérivée $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ puisque, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ suffisamment proche de a pour que $x - a > 0$, on a

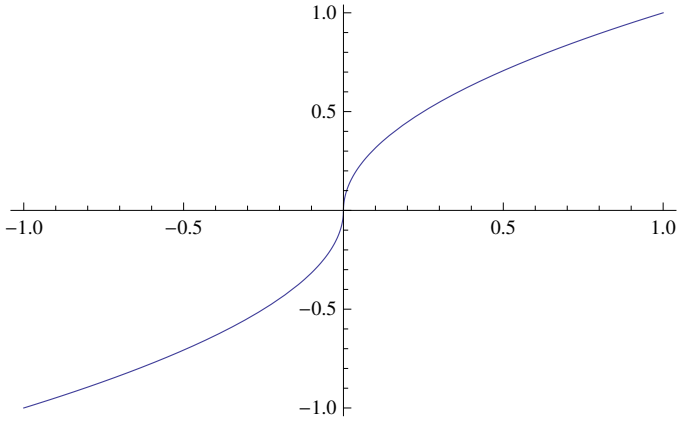
$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \xrightarrow[x \to a]{} \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

La tangente de $f(x)$ en $x = 0$ est donc bien la droite verticale passant par l'origine.

Pour avoir une fonction définie sur tous les réels, on peut l'étendre avec

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0, \\ -\sqrt{-x} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le graphe de la fonction est alors



f) Il suffit de considérer la fonction $x \mapsto |x|$ pour voir qu'une fonction continue n'est pas nécessairement dérivable.

Par contre, toute fonction dérivable est continue.

En effet, soit f une fonction réelle dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit $\epsilon > 0$ fixé, nous voulons trouver un $\delta > 0$ tel que

$$f([x_0 - \delta, x_0 + \delta]) \subseteq [f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon].$$

Comme

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0),$$

on a que pour tout choix de $\epsilon'>0$, il existe $\delta'>0$ tel que

$$|h|\leq\delta' \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)\right|\leq\epsilon'$$

Posons $\epsilon'=1$; on a donc que, pour tout $|h|\leq\delta'$,

$$|f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h|\leq h.$$

Or, avec l'inégalité du triangle inverse (démontrée dans une série précédente),

$$\begin{aligned}|f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h| &\geq ||f(x_0+h)-f(x_0)|-|f'(x_0)h||\\ &\geq |f(x_0+h)-f(x_0)|-|f'(x_0)h|.\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $|h|\leq\min\left(\delta',\frac{\epsilon}{1+|f'(x_0)|}\right)$,

$$\begin{aligned}|f(x_0+h)-f(x_0)| &\leq h+|f'(x_0)h|\\ &\leq \frac{\epsilon}{1+|f'(x_0)|}+|f'(x_0)|\frac{\epsilon}{1+|f'(x_0)|}\\ &=\epsilon.\end{aligned}$$

Exercice 4 (10 points)

a) $f'(x)=(10x-23)'=10(x)'-(23)'=10+0=10$
$g'(x)=(x^9)'+(x^8)'+(x)'+(1)'=9x^8+8x^7+1+0=9x^8+8x^7+1$

b) $f(t)=\dfrac{1}{t}=\dfrac{u(t)}{v(t)}$ avec $u(t)=1\Rightarrow u'(t)=0$ et $v(t)=t\Rightarrow v'(t)=1$.

Par la formule de la dérivée d'un quotient, il vient $f'(t)=\dfrac{0\cdot t-1\cdot 1}{t^2}=-\dfrac{1}{t^2}$

Pour $g(t)=\dfrac{2}{t^2}$, avec la formule du quotient, $g'(t)=\dfrac{0\cdot t^2-2\cdot 2t}{t^4}=-\dfrac{4t}{t^4}=-\dfrac{4}{t^3}$

c) $f'(y)=\lim\limits_{a\to y}\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{y}}{a-y}\cdot\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{y}}{\sqrt{a}+\sqrt{y}}=\lim\limits_{a\to y}\dfrac{a-y}{(a-y)\cdot\sqrt{a}+\sqrt{y}}=\lim\limits_{a\to y}\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{y}}=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$

On peut aussi utiliser la formule de la dérivée de la fonction inverse :

si $x=\sqrt{y}$, $(\sqrt{y})'=\dfrac{1}{(x^2)'}=\dfrac{1}{2x}=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$

$$g'(y) = \lim_{a\to y} \frac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{y}}{a-y} \cdot \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a\cdot y} + \sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a\cdot y} + \sqrt[3]{y^2}}$$
$$= \lim_{a\to y} \frac{a-y}{(a-y)\cdot(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a\cdot y} + \sqrt[3]{y^2})} = \lim_{a\to y} \frac{1}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a\cdot y} + \sqrt[3]{y^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$$

On peut aussi utiliser la formule de la dérivée de la fonction inverse :

si $y = \sqrt[3]{x}$, $(\sqrt[3]{x})' = \dfrac{1}{(y^3)'} = \dfrac{1}{3y^2} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

d) $f'(u) = ((u+5)(u+5))' = 1\cdot(u+5) + (u+5)\cdot 1 = 2(u+5)$

$g'(u) = 2(u+5)\cdot(u-3) + (u+5)^2\cdot 1 = (u+5)(2(u-3)+u+5) = (u+5)(3u-1)$

e) $f'(x) = \dfrac{2\cdot(x-5) - (2x-3)\cdot 1}{(x-5)^2} = \dfrac{2x-10-2x+3}{(x-5)^2} = \dfrac{-7}{(-5+x)^2}$

$g'(x) = \dfrac{2x(x-1) - (x^2+2)\cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$

f) $f'(x) = 6x^2 + (5x^{-7})' = 6x^2 - 35x^{-8} = 6x^2 - \dfrac{35}{x^8}$

$$g'(x) = \frac{(3x^2-2)\cdot(2-x^2) - (x^3-2x)(-2x)}{(2-x^2)^2} = \frac{6x^2-3x^4-4+2x^2+2x^4-4x^2}{(2-x^2)^2}$$
$$= \frac{-x^4+4x^2-4}{(2-x^2)^2} = \frac{-(x^4-4x^2+4)}{(2-x^2)^2} = \frac{-(x^2-2)^2}{(2-x^2)^2} = -1$$

Exercice 5 (5 points)

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 \text{ et } g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{si } x \geq 0, \\ -\frac{1}{2}x^2 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Comme $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en $x = 0$, la dérivée d'une fonction quelconque n'est, en général, pas dérivable.

Exercice 6 (10 points)

a) Les deux points d'intersection sont $(0,0)$ et $(1,1)$. En $(0,0)$, les deux fonctions ont leur dérivée nulle, l'angle entre leur courbe est donc zéro en ce point.
Pour le deuxième point, si $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$, on a $f'(1) = 2$ et $g'(1) = 3$, donc

$$\alpha = \arctan\left|\frac{2-3}{1+2\cdot 3}\right| = \arctan\left(\frac{1}{7}\right) \cong 0,142$$

b) L'équation $x^2 - 2x = \frac{1}{2}x$ conduit aux solutions $x = 0$ et $x = \dfrac{5}{2}$.

Ainsi, on calcule, avec $f(x) = x^2 - 2x$ et $g(x) = \dfrac{1}{2}x$,

$$\alpha_1 = \arctan\left|\frac{f'(0) - g'(0)}{1 + f'(0)\cdot g'(0)}\right| = \arctan\left|\frac{-2 - 1/2}{1 + (-2)\cdot 1/2}\right| = \arctan\left(\frac{5/2}{0}\right) = \frac{\pi}{2}$$
$$\alpha_2 = \arctan\left|\frac{f'(5/2) - g'(5/2)}{1 + f'(5/2)\cdot g'(5/2)}\right| = \arctan\left|\frac{3 - 1/2}{1 + 3\cdot (1/2)}\right| = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

c) L'équation $\tan(x) = 1$ conduit aux solutions $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Etant donné la périodicité des fonctions en jeu, on peut se contenter d'étudier les cas

$$x = \frac{\pi}{4} \qquad \text{et} \qquad x = \frac{5\pi}{4}.$$

On a

$$\alpha_1 = \arctan\left|\frac{f'(\pi/4) - g'(\pi/4)}{1 + f'(\pi/4)\cdot g'(\pi/4)}\right| \cong \arctan\left(\frac{1,41}{0,5}\right) \cong 1,23$$
$$\alpha_2 = \arctan\left|\frac{f'(5\pi/4) - g'(5\pi/4)}{1 + f'(5\pi/4)\cdot g'(5\pi/4)}\right| = \cong \arctan\left(\frac{1,41}{0,5}\right) \cong 1,23$$

Exercice 7 (5 points)

Soit $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$. Alors $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ et on a le système d'équations

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + a + b = 1 \\ 3 + 2a + b = 0 \end{cases}$$

qui a pour solution $a = -3$ et $b = 3$.

Exercice 8 (5 points)

Il faut déterminer m tel que $f'(0) = -\dfrac{20}{9}$.

Comme

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x + m - 2)(x^2 - 2y - 3) - (x^2 + (m-2)x - 10)(2x - 2)}{(x^2 - 2x - 3)} \\ &= \frac{2x^3 - 4x^2 - 6x + (m-2)x^2 - 2(m-2)x - 3(m-2)}{(x^2 - 2x - 3)^2} \\ &\qquad + \frac{-2x^3 + 2x^2 - 2(m-2)x^2 + 2(m-2)x + 20x - 20}{(x^2 - 2x - 3)} \\ &= \frac{-mx^2 + 14x - 14 - 3m}{(x^2 - 2x - 3)^2}, \end{aligned}$$

on a l'équation

$$\frac{-14-3m}{9} = -\frac{20}{9}$$

qui a pour solution

$$m = 2.$$

Exercice 9 (5 points)

Soit $a \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}(f\cdot g)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(x)g(a)+f(x)g(a)-f(a)g(a)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} + g(a)\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\\ &= f(a)g'(a)+f'(a)g(a).\end{aligned}$$

Exercice 10 (10 points)

Dans cette exercice, nous proposons à chaque fois deux solutions :

La première avec la définition usuelle de la dérivée vue en cours : $f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

La deuxième avec l'autre définition de la dérivée $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

a) Première version : On utilise le changement de variables $y = -x$ (et si $-y \to -a$, alors $y \to a$)

$$\begin{aligned}f'(-a) &= \lim_{x\to -a}\frac{f(x)-f(-a)}{x+a} = \lim_{y\to a}\frac{f(-y)-f(-a)}{-y+a} = \lim_{y\to a}\frac{f(y)-f(a)}{-(y-a)}\\ &= -\lim_{y\to a}\frac{f(y)-f(a)}{y-a} = -f'(a).\end{aligned}$$

Deuxième version :

$$\begin{aligned}f'(-x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(-(x-h))-f(-x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h}\\ &= -\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(-x)}{-h} = -f'(x).\end{aligned}$$

b) Première version : On utilise le changement de variables $y = -x$

$$\begin{aligned}f'(-a) &= \lim_{x\to -a}\frac{f(x)-f(-a)}{x+a} = \lim_{y\to a}\frac{f(-y)-f(-a)}{-y+a} = \lim_{y\to a}\frac{-f(y)+f(a)}{-y+a}\\ &= \lim_{y\to a}\frac{-(f(y)-f(a))}{-(y-a)} = \lim_{y\to a}\frac{f(y)-f(a)}{y-a} = f'(a).\end{aligned}$$

Deuxième version :

$$f'(-x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h)-f(-x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(-(x-h))-f(-x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-f(x-h)+f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{-h} = f'(x).$$

c) Soit $P \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ la période.

Première version : On utilise le changement de variables $y = x - P$ (et si $y + P \to a + P$, alors $y \to a$)

$$f'(a+P) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a+P)}{x-(a+P)} = \lim_{y\to a} \frac{f(y+P)-f(a+P)}{y+P-(a+P)}$$
$$= \lim_{y\to a} \frac{f(y)-f(a)}{y-a} = f'(a).$$

Deuxième version :

$$f'(x+P) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h+P)-f(x+P)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$= f'(x).$$