

Corrigé Test 1 - Probabilités et statistiques

23 septembre 2026

Problème 1. (4 points)**Loi de de Morgan.** Soient $E_1, \dots, E_n$ des événements. Montrer que :

$$\bigcap_{i=1}^n E_i^c = \left(\bigcup_{i=1}^n E_i \right)^c$$

On le montre grâce à la "double-inclusion". Montrons d'abord que $(\bigcup_{i=1}^n E_i)^c \subset \bigcap_{i=1}^n E_i^c$.Considérons un élément x de $(\bigcup_{i=1}^n E_i)^c$. On a

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{i=1}^n E_i \right)^c &\Rightarrow x \notin \bigcup_{i=1}^n E_i \Rightarrow x \notin E_i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n \\ &\Rightarrow x \in E_i^c \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n \Rightarrow x \in \bigcap_{i=1}^n E_i^c. \end{aligned}$$

Montrons maintenant que $\bigcap_{i=1}^n E_i^c \subset (\bigcup_{i=1}^n E_i)^c$. Considérons un élément x de $\bigcap_{i=1}^n E_i^c$. On a

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{i=1}^n E_i^c &\Rightarrow x \in E_i^c \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n \Rightarrow x \notin E_i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n \\ &\Rightarrow x \notin \bigcup_{i=1}^n E_i \Rightarrow x \in \left(\bigcup_{i=1}^n E_i \right)^c. \end{aligned}$$

Remarque : On aurait très bien pu montrer cette loi directement en utilisant des équivalences.

Problème 2. (4 points)Démontrer la formule de König : Soit X une variable aléatoire. Alors

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2.$$

Si $E[X] = \mu$, la définition de la variance utilise le carré $(X - \mu)^2 = X^2 - 2\mu X + \mu^2$.

Par linéarité de l'espérance, on a

$$\text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2] \stackrel{\text{lin de } E}{=} E[X^2] - 2\mu E[X] + E[\mu^2] = E[X^2] - \mu^2 = E[X^2] - E[X]^2$$

puisque l'espérance de la constante μ^2 vaut μ^2 .

Problème 3. ($2 + 2 + 2 + 1 + 3 = 10$ points) *Probabilités*

Douze clones indistinguables de Monsieur Seal viennent prendre un café à l'EPFL.

De combien de façons différentes peuvent-ils se répartir entre les huit cafétérias du site

a) s'il n'y a aucune restriction ?

Il y en a $\overline{C}_{12}^8 = C_{8-1}^{12+8-1} = C_7^{19} = \overline{P}_{19}(7, 12) = 50'388$.

b) si les clones souhaitent être par deux et pas plus dans une cafétéria ?

Il y a une seule façon de former 6 paires de clones puisqu'ils sont indistinguables. Les paires sont aussi indistinguables et il faut choisir les 6 cafétérias où elles iront parmi les huit.

Il y a donc $C_6^8 = 28$ possibilités.

c) si chaque cafétéria doit accueillir au moins un clone ?

8 clones vont chacun dans une cafétéria. Il reste $12-8 = 4$ clones à répartir sans restriction entre huit cafétérias :

$\overline{C}_4^8 = C_{8-1}^{4+8-1} = C_7^{11} = \overline{P}_{11}(7, 4) = 330$ répartitions différentes.

Un jour, pour rigoler, chaque clone vient avec une cravate différente si bien qu'on peut tous les distinguer. Ce jour-là, de combien de façons différentes peuvent-ils se répartir entre les huit cafétérias du site

d) s'il n'y a aucune restriction ?

Chacun des douze M. Seal distinct peut choisir une des huit cafétérias :

Il y a $\overline{A}_{12}^8 = 8^{12} = 6,87 \cdot 10^{10}$ répartitions différentes.

e) s'ils souhaitent être par deux et pas plus dans une cafétéria ?

Il y a $\frac{12!}{(2!)^6 \cdot 6!} = \frac{479'001'600}{46'080} = 10'395$ façons de former six paires différentes, puis

$A_6^8 = \frac{8!}{2!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 20'160$ façons de répartir ces paires entre les huit cafétérias.

Ainsi, il y a $10'395 \cdot 20'160 = 209'653'200$ répartitions différentes en tout.

Problème 4. ($3 + 3 = 6$ points)

Pour répondre aux questions suivantes, on suppose que les anniversaires se répartissent uniformément dans une année et on néglige les années bissextiles.

a) Dans un groupe de cinq personnes, quelle est la probabilité que trois d'entre elles exactement aient leur anniversaire au mois d'avril ?

La probabilité qu'une personne ait son anniversaire en avril vaut $\frac{30}{365}$.

La probabilité que trois personnes aient leur anniversaire au mois d'avril et les deux autres pas vaut $C_3^5 \cdot \left(\frac{30}{365}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{30}{365}\right)^2 = 10 \cdot \left(\frac{30^3 \cdot 335^2}{365^5}\right) \simeq 0.004677 = 0.4677\%$

b) Si cinq personnes ont leur anniversaire au mois d'avril, quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre elles aient leur anniversaire le même jour ?

La probabilité qu'elles aient leurs anniversaires un jour différent d'avril de 30 jours vaut

$\frac{A_5^{30}}{\overline{A}_5^{30}} = \frac{30}{30} \cdot \frac{29}{30} \cdot \frac{28}{30} \cdot \frac{27}{30} \cdot \frac{26}{30} = \frac{1111}{3750} \simeq 0,7037 = 70,37\%$ Ainsi, la probabilité qu'au moins deux d'entre elles aient leur anniversaire le même jour vaut : $1 - 0,7037 = 0.2963 = 29,63\%$.

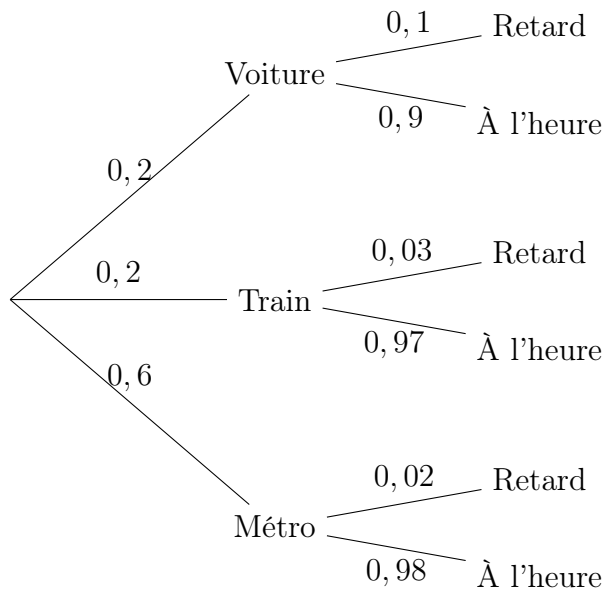
Problème 5. ($3 + 3 = 6$ points)

Une personne peut se rendre au travail en train, en métro ou en voiture. Elle prend sa voiture un jour sur cinq, le train un jour sur cinq et le métro trois jour sur cinq.

La probabilité qu'elle soit en retard au travail est de 10% si elle prend sa voiture, de 3% si elle prend le train et de 2% si elle prend le métro.

a) Quelle est la probabilité que cette personne arrive en retard au travail ?

On peut s'aider d'un arbre :



Probabilité d'être en retard :

$$\begin{aligned}
 P(R) &= 0.2 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.03 + 0.6 \cdot 0.02 \\
 &= 0.02 + 0.006 + 0.012 \\
 &= 0.038 = 3,8\% = \frac{19}{500}
 \end{aligned}$$

b) Si cette personne est en retard, quelle est la probabilité qu'elle ait pris sa voiture ?

$$P(V|R) = \frac{P(R \cap V)}{P(R)} = \frac{0.2 \cdot 0.1}{0.2 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.03 + 0.6 \cdot 0.02} = \frac{0.02}{0.038} = \frac{10}{19} \simeq 0.5263 = 52,63\%$$

Problème 6. ($1 + 3 + 4 + 2 + 3 + 2 = 15$ points)

On veut étudier le lien entre le poids d'une personne et le taux d'alcool dans le sang. Pour ce faire, on demande à sept personnes de consommer 3 bières en une heure, puis on mesure le taux d'alcool de leur sang. On obtient les résultats suivants :

Poids en kg	52	57	60	66	70	82	91
Taux d'alcool en mg/100ml	131	120	112	105	84	71	65

a) Dans cette étude, quelle est la variable indépendante X et la variable dépendante Y ?

b) Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X et de Y

$$E[X] = 68,28, \quad E[X^2] = 4'830,57, \quad \text{Var}[X] = 167,63, \quad \sigma_X = 12,95$$

$$E[Y] = 98,29, \quad E[Y^2] = 10'207, \quad \text{Var}[Y] = 547,35, \quad \sigma_Y = 23,40.$$

c) Calculer le coefficient de corrélation des variables X et Y et l'interpréter.

$$\text{On a } E[XY] = 6417, \text{ Cov}(X, Y) \cong -294,4 \text{ et } \text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}[X] \cdot \text{Var}[Y]}} \cong -0,97$$

Les variables sont fortement corrélées négativement : si l'une augmente, l'autre diminue.

d) Déterminer le modèle de régression linéaire qui permet d'estimer Y en fonction de X .

La formule est $Z = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)}(X - E(X)) + E(Y)$ ce qui donne ici

$$Z = -1,756(X - 68,28) + 98,29 \quad \text{c'est-à-dire} \quad Z = -1,756X + 218,19$$

e) Calculer le coefficient de détermination et interpréter par une phrase type.

$$R^2 = (-0,97)^2 = 0,94$$

Selon le modèle de régression linéaire, le poids explique 94% de la variance du taux d'alcool ; seulement 6% de la variance du taux d'alcool est imputable à d'autres facteurs.

f) Obtient-on la relation linéaire réciproque si on calcule la droite de régression qui permet d'estimer X en fonction de Y ? Expliquer brièvement la réponse.

Non, ce n'est pas la réciproque car ce ne sont pas les mêmes écarts ε_i dont la somme des carrés est minimisée.

Problème 7. ($4 + 2 = 6$ points)

On vous donne k francs pour jouer au jeu suivant : On tire au hasard un mot dans la phrase "TU PEUX GAGNER". Vous devez prédire en combien de lettres s'écrit le mot tiré et vous devrez payer le carré de la différence entre la longueur prédite et la vraie longueur.

a) Quelle longueur faut-il prédire pour payer le moins possible en moyenne ?

Soit X la variable aléatoire donnant la différence entre la longueur prédite et la longueur du mot tiré. Si on prédit t , on paie en moyenne

$$E_t[X^2] = \frac{1}{3} ((t-2)^2 + (t-4)^2 + (t-6)^2) = t^2 - 8t + \frac{56}{3} = (t-4)^2 + \frac{8}{3}.$$

Cette espérance atteint son minimum en $t = 4$.

Il faut prédire que le mot tiré comporte 4 lettres pour minimiser le montant moyen à payer.

b) Combien doit-on vous proposer pour qu'en utilisant la stratégie définie sous a), le jeu soit équitable ?

En prédisant que le mot tiré comporte 4 lettres, on paie en moyenne

$$E_4[X^2] = 4^2 - 8 \cdot 4 + \frac{56}{3} = \frac{8}{3} = 2, \bar{6}.$$

Le jeu est très légèrement en votre faveur si vous payez 2,65 francs pour jouer.

Il est légèrement en votre défaveur si vous payez 2,70 francs.