

Corrigé Test 1 - Intégration

16.09.26

Exercice 1. (5 points)

On considère la fonction A définie par

$$A(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}_+^*$$

En utilisant uniquement la définition ci-dessus, montrer que

$$\forall k \in \mathbb{R}_+^*, \quad A(k \cdot x) = A(x) + A(k)$$

On calcule d'abord $\frac{d}{dx}(A(k \cdot x)) = \frac{1}{k \cdot x} \cdot (k \cdot x)' = \frac{1}{k \cdot x} \cdot k = \frac{1}{x} = A'(x)$

En intégrant les deux extrémités il vient $A(k \cdot x) = A(x) + c$.

Pour $x = 1$, on a $A(k) = \underbrace{A(1)}_{=0} + c$; d'où $c = A(k)$,

Ainsi, $A(k \cdot x) = A(x) + A(k)$.

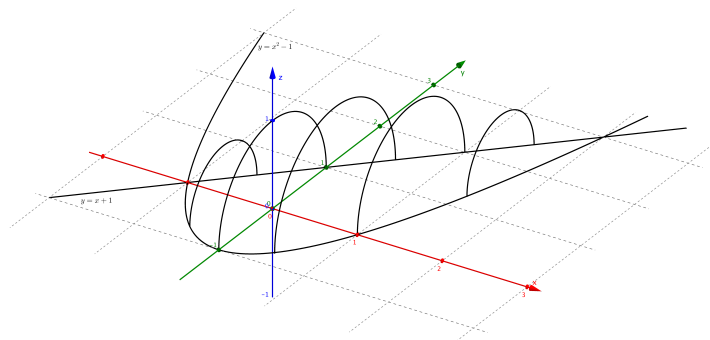
Exercice 2. (12 points)

On considère le solide ayant pour base la région fermée délimitée par les courbes d'équation

$$y = x + 1 \quad \text{et} \quad y = x^2 - 1,$$

et pour sections transversales, perpendiculaires à l'axe Ox , des demi-cercles.

a) Esquisser le solide $\mathcal{S}$ dans le système d'axe $Oxyz$ ci-dessous.



- b) Calculer le volume de ce solide en définissant une intégrale appropriée grâce aux sommes de Riemann et justifie son existence.

Points d'intersection des courbes dans le plan Oxy :

$$\begin{aligned} x+1 &= x^2-1 \Leftrightarrow x+1-(x+1)(x-1)=0 \Leftrightarrow (x+1)(1-(x-1))=0 \Leftrightarrow \\ (x+1)(2-x) &=0 \Leftrightarrow x=-1 \text{ ou } x=2. \end{aligned}$$

Les sections perpendiculaires à l'axe Ox forment des demi cercles de diamètre

$$d = x+1-(x^2-1) = -x^2+x+2 \text{ et d'aire } A = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{-x^2+x+2}{2} \right)^2 = \frac{\pi}{8} (-x^2+x+2)^2.$$

En utilisant une subdivision régulière de l'intervalle $[-1, 2]$ sur Ox , on approche le volume par une somme de Riemann.

$$V \simeq \sum_{i=1}^n \frac{\pi}{8} (-x_i^2 + x_i + 2)^2 \cdot \delta \quad \text{où} \quad x_i = -1 + \frac{3i}{n} \text{ et } \delta = \frac{3}{n}.$$

Comme $f(x) = (-x^2+x+2)^2 = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$ est continue sur $[-1, 2]$, la somme de Riemann converge lorsque $n \rightarrow \infty$ et le volume du solide vaut

$$\frac{\pi}{8} \int_{-1}^2 (x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4) dx = \frac{\pi}{8} \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} - x^3 + 2x^2 + 4x \right]_{-1}^2 = \frac{\pi}{8} \frac{81}{10} = \frac{81\pi}{80}$$

Exercice 3. (9 points)

Calculer les intégrales suivantes en détaillant chaque étape de calcul.

a) $\int_0^{\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$

On pose $\sqrt{x} = t \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt. \quad x = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ et } x = \pi^2 \Leftrightarrow t = \pi > 0$

$$2 \int_0^{\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^{\pi} \sin(t) dt = 2 [-\cos(t)]_0^{\pi} = 2(1+1) = 4$$

b) $\int_2^6 \frac{8x^2+11x+4}{x+1} dx$ Par division Euclidienne, $\frac{8x^2+11x+4}{x+1} = 8x+3 + \frac{1}{x+1}$

$$\begin{aligned} \int_2^6 \frac{8x^2+11x+4}{x+1} dx &= \int_2^6 8x+3 + \frac{1}{x+1} dx = [4x^2+3x+\ln|x+1|]_2^6 = 144+18+ \\ \ln 7 - 16 - 6 - \ln 3 &= 140 + \ln \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Exercice 4. (14 points)

On donne :

- la parabole p d'équation : $y = -x^2 + 7x$
- la courbe c d'équation : $y = \sqrt{x-2}$
- la droite d d'équation : $x = 6$.

Le domaine grisé D est la surface plane fermée contenant le point $O(0;0)$ et limitée par l'axe Ox , la parabole p , la droite d et la courbe c .

a) Déterminer l'aire exacte du domaine D .

$$\int_0^6 -x^2 + 7x \, dx = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 \Big|_0^6 = \left(-\frac{1}{3} \cdot 6^3 + \frac{7}{2} \cdot 6^2\right) - (0) = -72 + 126 = 54 \, \text{u}^2.$$

$$\begin{aligned} \int_2^6 \sqrt{x-2} \, dx &= \int_2^6 (x-2)^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{2}{3} \cdot (x-2)^{\frac{3}{2}} \Big|_2^6 = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{(x-2)^3} \Big|_2^6 \\ &= \frac{2}{3} \cdot \sqrt{4^3} - 0 = \frac{16}{3} \, \text{u}^2 = 5, \bar{3} \, \text{u}^2. \end{aligned}$$

$$\text{Aire du domaine } D : 54 - \frac{16}{3} = \frac{162}{3} - \frac{16}{3} = \frac{146}{3} = 48, \bar{6}.$$

b) On fait tourner le domaine D autour de l'axe Ox . Calculer le volume exact du solide de révolution engendré par cette rotation.

$$\begin{aligned} \pi \int_0^6 (-x^2 + 7x)^2 \, dx &= \pi \int_0^6 x^4 - 14x^3 + 49x^2 \, dx = \pi \left[\frac{1}{5}x^5 - 14 \cdot \frac{1}{4}x^4 + 49 \cdot \frac{1}{3}x^3 \right] \Big|_0^6 \\ &= \pi \left[\left(\frac{7'776}{5} - 4'536 + 3'528 \right) - (0) \right] = \frac{2'736}{5} \pi \, \text{u}^3 = 547,2 \pi \, \text{u}^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi \int_2^6 (\sqrt{x-2})^2 \, dx &= \pi \int_2^6 x - 2 \, dx = \pi \left[\frac{1}{2}x^2 - 2x \right] \Big|_2^6 \\ &= \pi \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 6^2 - 12 \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot 2^2 - 4 \right) \right] = \pi[6 + 2] = 8\pi \, \text{u}^3. \end{aligned}$$

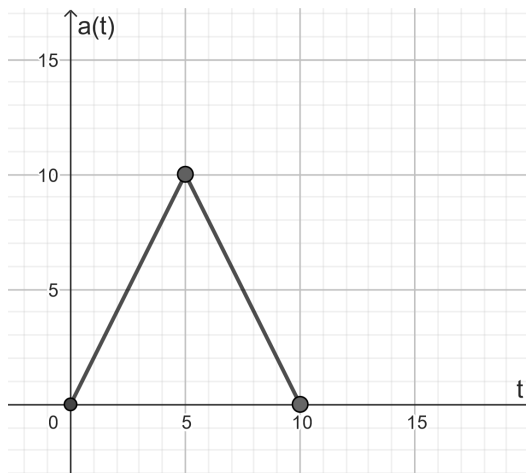
$$\text{Volume du solide de révolution : } \frac{2'736}{5} \pi - \frac{40}{5} \pi = \frac{2'696}{5} \pi = 539,2 \pi.$$

Exercice 5. (16 points)

Un chariot M_1 , propulsé par une petite fusée, se déplace selon une trajectoire rectiligne.

Le diagramme ci-contre donne l'accélération $a(t)$ de M_1 , exprimée en $[\text{cm/s}^2]$, pour $0 \leq t \leq 10$.

On désigne par $v(t)$ la vitesse et par $x(t)$ la position de M_1 au temps t .



- a) Donner l'expression de $a(t)$ pour $0 \leq t \leq 10$.

On a

$$a(t) = \begin{cases} 2t & 0 \leq t \leq 5 \\ -2t + 20 & 5 \leq t \leq 10 \end{cases}$$

- b) Sachant que la vitesse initiale v_0 et la position initiale x_0 de M_1 sont toutes deux nulles, déterminer les expressions de $v(t)$ et de $x(t)$ pour $0 \leq t \leq 10$.

Si $0 \leq t \leq 5$: $v(t) = v_0 + \int_0^t 2u \, du = t^2$ et $x(t) = x_0 + \int_0^t u^2 \, du = \frac{1}{3}t^3$

Si $5 \leq t \leq 10$:

$$v(t) = v(5) + \int_5^t -2u + 20 \, du = 25 + [-u^2 + 20u]_5^t = 25 - t^2 + 20t - 75 = -t^2 + 20t - 50$$

$$\begin{aligned} \text{et } x(t) &= x(5) + \int_5^t -u^2 + 20u - 50 \, du = \frac{125}{3} - \frac{1}{3}t^3 + 10t^2 - 50t + \frac{125}{3} \\ &= -\frac{1}{3}t^3 + 10t^2 - 50t + \frac{250}{3} \end{aligned}$$

- c) Quelle est la distance parcourue par M_1 en 10 secondes ainsi que sa vitesse en $t = 10$?

On a $v(10) = 50 \text{ cm/s}$ et $x(10) = 250 \text{ cm}$

- d) Un second chariot M_2 se déplace avec une accélération constante égale à a_2 sur la même trajectoire rectiligne. Si les deux chariots démarrent simultanément en $t = 0$, déterminer la vitesse initiale de M_2 ainsi que la valeur de a_2 pour que M_1 et M_2 arrivent au même point avec la même vitesse lorsque $t = 10$.

Pour M_2 : $a(t) = a_2$, $v(t) = v_0 + a_2 t$ et $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_2 t^2 = v_0 t + \frac{1}{2}a_2 t^2$.

Pour M_2 , on veut $v(10) = 50$, donc $v_0 + 10a_2 = 50$.

De plus, on veut $x(10) = 250$, donc $10v_0 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 100 = 250 \iff 10v_0 + 50a_2 = 250$

En résolvant le système, on obtient $v_0 = 0 \text{ cm/s}$ (vitesse initiale nulle) et $a_2 = 5 \text{ cm/s}^2$.