

Test 1 - Intégration

16.09.26

Nom: _____ Prénom: _____

Le test dure 90 minutes. Toutes les réponses doivent être justifiées et les calculs détaillés. La calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 1. (5 points)

On considère la fonction A définie par

$$A(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}_+^*$$

En utilisant uniquement la définition ci-dessus, montrer que

$$\forall k \in \mathbb{R}_+^*, \quad A(k \cdot x) = A(x) + A(k)$$

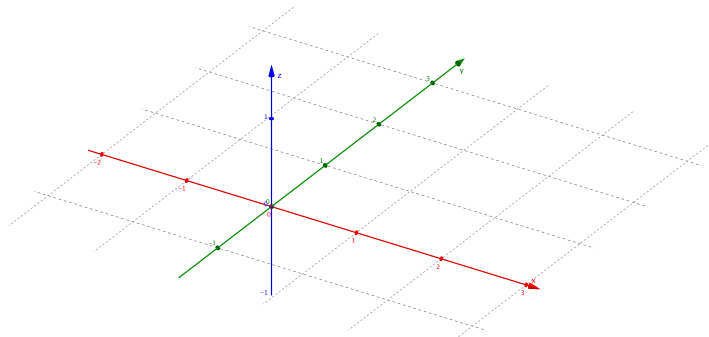
Exercice 2. (12 points)

On considère le solide ayant pour base la région fermée délimitée par les courbes d'équation

$$y = x + 1 \quad \text{et} \quad y = x^2 - 1,$$

et pour sections transversales, perpendiculaires à l'axe Ox , des demi-cercles.

a) Esquisser le solide $\mathcal{S}$ dans le système d'axe $Oxyz$ ci-dessous.



b) Calculer le volume de ce solide en définissant une intégrale appropriée grâce aux sommes de Riemann et justifie son existence.

Exercice 3. (9 points)

Calculer les intégrales suivantes en détaillant chaque étape de calcul.

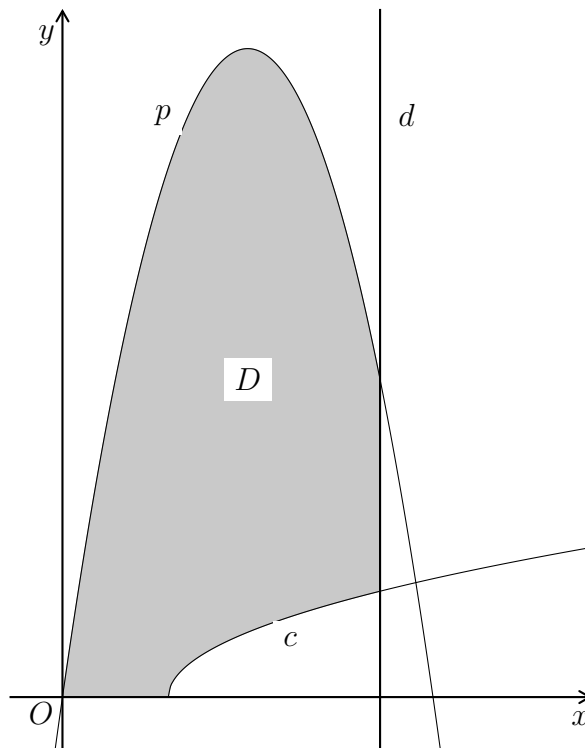
a) $\int_0^{\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$

b) $\int_2^6 \frac{8x^2 + 11x + 4}{x + 1} dx$

Exercice 4. (14 points)

On donne :

- la parabole p d'équation : $y = -x^2 + 7x$
- la courbe c d'équation : $y = \sqrt{x-2}$
- la droite d d'équation : $x = 6$.



Le domaine grisé D est la surface plane fermée contenant le point $O(0;0)$ et limitée par l'axe Ox , la parabole p , la droite d et la courbe c .

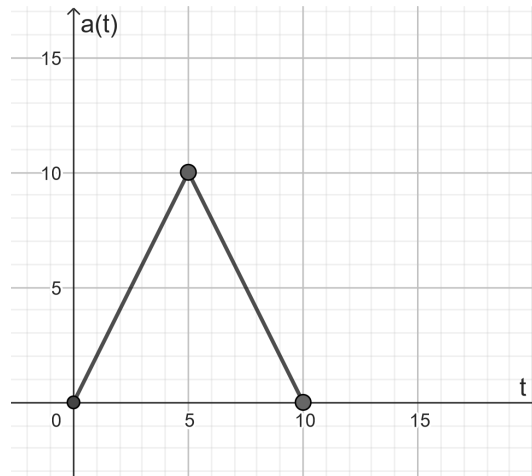
- a) Déterminer l'aire exacte du domaine D .
- b) On fait tourner le domaine D autour de l'axe Ox . Calculer le volume exact du solide de révolution engendré par cette rotation.

Exercice 5. (16 points)

Un chariot M_1 , propulsé par une petite fusée, se déplace selon une trajectoire rectiligne.

Le diagramme ci-contre donne l'accélération $a(t)$ de M_1 , exprimée en $[\text{cm/s}^2]$, pour $0 \leq t \leq 10$.

On désigne par $v(t)$ la vitesse et par $x(t)$ la position de M_1 au temps t .



- Donner l'expression de $a(t)$ pour $0 \leq t \leq 10$.
- Sachant que la vitesse initiale v_0 et la position initiale x_0 de M_1 sont toutes deux nulles, déterminer les expressions de $v(t)$ et de $x(t)$ pour $0 \leq t \leq 10$.
- Quelle est la distance parcourue par M_1 en 10 secondes ainsi que sa vitesse en $t = 10$?
- Un second chariot M_2 se déplace avec une accélération constante égale à a_2 sur la même trajectoire rectiligne. Si les deux chariots démarrent simultanément en $t = 0$, déterminer la vitesse initiale de M_2 ainsi que la valeur de a_2 pour que M_1 et M_2 arrivent au même point avec la même vitesse lorsque $t = 10$.