
Test 1 - Probabilités et statistiques

24 septembre 2025

Nom: _____ Prénom: _____

Le test dure 105 minutes. Les réponses doivent être rédigées de manière claire dans le dossier. Au besoin, il est possible d'utiliser des feuilles supplémentaires. Justifiez tous vos calculs.

Exercice 1. (5 points) *Probabilités*

Dans une classe de 24 élèves, il y a 3 prix à attribuer. Calculer le nombre de façons d'attribuer ces 3 prix dans chacun des cas suivants :

- a) les prix sont tous différents et chaque élève ne peut recevoir qu'un seul prix ;
- b) les prix sont tous différents et chaque élève peut recevoir plusieurs prix ;
- c) les prix sont identiques et chaque élève ne peut recevoir qu'un seul prix.
- d) les prix sont identiques et chaque élève peut recevoir plusieurs prix.

Exercice 2. (4 points)

Démontrer que $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$.

Exercice 3. (8 points)

On dépose dans une urne 12 boules (4 rouges, 4 blanches et 4 vertes). Les boules d'une même couleur sont numérotées de 1 à 4 (il y a donc trois boules portant le numéro 1, une de chaque couleur ; de même pour les numéros 2 à 4).

On tire simultanément quatre boules de l'urne. Calculer la probabilité d'obtenir

- a) exactement trois boules de la même couleur ;
- b) au moins une boule portant le numéro 1 ;
- c) exactement une boule portant le numéro 1 et exactement trois boules rouges.

Exercice 4. (10 points) *Probabilités*

- a) On lance un dé bien équilibré dix fois de suite.

Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 fois le chiffre 6 ?

- b) On lance simultanément trois dés à six faces bien équilibrés.

Calculer la probabilité des événements suivants :

A = "obtenir un total d'exactly 4 points"

B = "obtenir un total d'au moins 5 points"

C = "obtenir les chiffres 1, 2 et 3"

D = "obtenir le chiffre 3 sur un dé sachant que le total des points vaut 5"

Exercice 5. (4 points)

Démontrer que si les événements E et F sont indépendants, alors les événements E et F^c le sont aussi.

Exercice 6. (11 points) *Statistiques*

Une étude (fictive!) aimerait déterminer s'il y a une relation entre la taille des pieds d'enfants de 10 ans et leur quotient intellectuel. Pour cela, ils constituent un échantillon de 10 enfants et obtiennent les données suivantes :

Enfant	Pointure	QI
A	31	50
B	31	55
C	32	52
D	33	56
E	33	63
F	34	65
G	35	69
H	36	90
I	37	110
J	38	150

- a) On considère X la variable aléatoire qui donne la pointure du pied et Y la variable aléatoire qui donne le QI. Calculer l'espérance et la variance pour X et Y .
- b) Donner la définition du coefficient de corrélation des variables X et Y puis le calculer.
- c) Est-il mathématiquement acceptable d'utiliser un modèle de régression linéaire pour estimer Y en fonction de X ? Justifier la réponse.
- d) Donner la formule du modèle de régression linéaire qui permet d'estimer Y en fonction de X . Le calcul des paramètres a et b n'est pas demandé.

Exercice 7. (4 points)

Dans une urne, il y a 5 boules rouges et 8 boules noires. On vous propose le jeu suivant :

Vous payez 10 francs, puis vous tirez successivement et sans remise 2 boules de l'urne.

Si vous tirez 2 boules rouges, vous gagnez 30 francs.

Si vous tirez une boule rouge, vous gagnez 10 francs.

Si vous ne tirez aucune boule rouge, vous ne gagnez rien.

On note X le gain **net** à ce jeu.

- a) Calculer l'espérance de X .
- b) Ce jeu est-il équitable ? Justifier par une phrase.