

Notations.

1. La **factorielle** de $n \in \mathbb{N}$ est le nombre

$$n! := \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n & \text{si } n \neq 0 \\ 1 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

2. Soient $n, k \in \mathbb{N}$ avec $k \leq n$. Le **coefficient binomial** de n et k est le nombre

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Il représente le nombre possibles de combinaisons de k nombre distincts choisis parmi n .

Exercice 1.

- a) Montrer, par un calcul direct, *l'identité de Pascal*, c'est-à-dire, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall k$ tel que $1 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

- b) Montrer, par récurrence et en utilisant le point précédent, que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} \text{ est un entier.}$$

Solution.

- a) On a, en utilisant que $m! = \frac{(m+1)!}{m+1}$,

$$\begin{aligned} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{kn!}{k!(n+1-k)!} + \frac{(n+1-k)n!}{k!(n+1-k)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \\ &= \binom{n+1}{k} \end{aligned}$$

- b) Définissons la proposition

$$P(n) : \text{ pour tout } k \in \{0, 1, \dots, n\} \text{ le nombre } \binom{n}{k} \text{ est entier.}$$

On doit montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Ancre : Pour $n = 0$, la propriété à montrer est

$$P(0) : \text{ pour tout } k \in \{0\} \text{ le nombre } \binom{0}{k} \text{ est entier.}$$

Soit donc $k = 0$. On a alors,

$$\binom{0}{k} = \binom{0}{0} = \frac{0!}{0!(0-0)!} = 1,$$

qui est bien un nombre entier.

Pas de récurrence : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que

$P(n)$: pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ le nombre $\binom{n}{k}$ est entier.

est vrai et montrons que

$P(n+1)$: pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n+1\}$ le nombre $\binom{n+1}{k}$ est entier.

est vrai.

Soit donc $k \in \{0, 1, \dots, n+1\}$ quelconque. On distingue 3 cas :

Cas 1 : $k = 0$.

On a alors,

$$\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{0!(n+1-0)!} = 1,$$

qui est un nombre entier.

Cas 2 : $k = n+1$.

On a alors,

$$\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!(n+1-n-1)!} = 1,$$

qui est un nombre entier.

Cas 3 : $1 \leq k \leq n$.

On a alors, par l'identité de Pascal,

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Or, par hypothèse de récurrence, vu que $k, k-1 \in \{0, \dots, n\}$, on a

$\binom{n}{k}$ et $\binom{n}{k-1}$ sont des nombres entiers.

Vu que la somme de nombres entiers est un nombre entier, on a le résultat.

Vu que dans tous les cas, on arrive à la même conclusion, on a le résultat.

Exercice 2.

Réécrire les ensemble suivants en utilisant la notation d'intervalles.

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}.$

f) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+1| \leq 1\}.$

b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \leq 1\}.$

g) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x^2 - 2| < 1\}.$

c) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 2\}.$

d) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -x < 3 \text{ et } x^2 \geq 4\}.$

h) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \mid \frac{1}{1-|x|} > 2\right\}.$

e) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -x^3 \geq 3\}.$

Solution.

a) $A =]-\infty; 1[.$

b) $A = [-1, +\infty[.$

c) $A =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[.$

d) $A =]-3, -2] \cup [2, +\infty[.$

e) $A =]-\infty, -\sqrt[3]{3}].$

f) $A = [-2, 0]$

g) $A =]-\sqrt{3}, -1[\cup]1, \sqrt{3}[.$

h) $A = \left]-1, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, 1\right[.$

Explicitons le raisonnement des inéquations à valeur absolue.

f) $|x+1| \leq 1 \iff \text{dist}(x, -1) \leq 1 \iff x \in [-1-1, -1+1] = [-2, 0]$

g) $|x^2-2| < 1 \iff \text{dist}(x^2, 2) < 1 \iff x^2 \in]2-1, 2+1[=]1, 3[$

En faisant attention à distinguer les cas $x > 0$ et $x < 0$, nous avons

$$x^2 \in]1, 3[\iff x \in]-\sqrt{3}, -1[\cup]1, \sqrt{3}[$$

h) Nous distinguons 2 cas :

— Si $|x| > 1$, alors

$$1 - |x| < 0 \implies \frac{1}{1 - |x|} < 0 < 2$$

donc $x \notin A$.

— Si $0 \leq |x| < 1$, alors

$$0 < 1 - |x| \leq 1 \implies \frac{1}{1 - |x|} \geq 1,$$

mais ça ne nous permet pas de déduire si $\frac{1}{1-|x|} > 2$. Nous devons alors procéder avec des inéquations équivalentes : puisque $1 - |x| > 0$, alors

$$\frac{1}{1 - |x|} > 2 \iff 1 > 2(1 - |x|) \iff 2|x| > 1 \iff |x| > \frac{1}{2}.$$

donc on doit avoir $\frac{1}{2} < |x| < 1$.

En conclusion

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < |x| < 1\right\} = \left]-1, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, 1\right[.$$

Exercice 3 (Challenge facultatif, mais encouragé à essayer!).

a) Montrer par récurrence la formule du *binôme de Newton* : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

b) En déduire que, pour tout entier n , on a

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

Solution.

a) Ancrage : Pour $n = 0$, le membre de gauche est $(a + b)^0 = 1$, tandis que le membre de droite est

$$\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1.$$

Vu qu'on obtient la même chose, le résultat est vrai pour $n = 0$.

Pas de récurrence : Soit $n \geq 0$. Supposons que

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad (\text{H.R.})$$

et montrons que

$$(a + b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.$$

On a

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)(a + b)^n \stackrel{\text{H.R.}}{=} (a + b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \end{aligned}$$

En faisant le changement de variables $k + 1 = j$ dans la première somme, on obtient

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n-j+1} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\ &= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j-1} a^j b^{n-j+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} \end{aligned}$$

Vu que la variable de sommation (j ou k) est muette (i.e. le nom de la variable ne change pas la valeur de la somme) on peut remplacer j par k dans la première somme. On obtient

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} \\ &= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \right) + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} \\ &= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1}. \end{aligned}$$

On utilise l'identité de Pascal et le fait que pour tout m , $\binom{m}{m} = 1$ et $\binom{m}{0} = 1$ pour déduire

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + a^0 b^{n+1} \\ &= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}, \end{aligned}$$

qui est le résultat voulu.

b) Pour $a = b = 1$, on a par le binôme de Newton,

$$2^n = (1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k},$$

qui est le résultat voulu.