

Notations.

1. La **factorielle** de $n \in \mathbb{N}$ est le nombre

$$n! := \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n & \text{si } n \neq 0 \\ 1 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

2. Soient $n, k \in \mathbb{N}$ avec $k \leq n$. Le **coefficient binomial** de n et k est le nombre

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Il représente le nombre possibles de combinaisons de k nombre distincts choisis parmi n .

Exercice 1.

- a) Montrer, par un calcul direct, *l'identité de Pascal*, c'est-à-dire, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall k$ tel que $1 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

- b) Montrer, par récurrence et en utilisant le point précédent, que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} \text{ est un entier.}$$

Exercice 2.

Réécrire les ensemble suivants en utilisant la notation d'intervalles.

- | | |
|---|--|
| a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}.$ | f) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x+1 \leq 1\}.$ |
| b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \leq 1\}.$ | g) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2 < 1\}.$ |
| c) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 2\}.$ | |
| d) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -x < 3 \text{ et } x^2 \geq 4\}.$ | h) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \mid \frac{1}{1- x } > 2\right\}.$ |
| e) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -x^3 \geq 3\}.$ | |

Exercice 3 (Challenge facultatif, mais encouragé à essayer!).

- a) Montrer par récurrence la formule du *binôme de Newton* : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

- b) En déduire que, pour tout entier n , on a

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$