

Exercice 1 : (6 points)

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_5^7 \frac{2x+41}{-x^2+x+12} dx$
2. $\int_0^{3\pi/2} \sqrt{1-(\sin(x))^2} e^{-\sin(x)} dx.$

Correction : (exercice très proche dans le test blanc)

1. On utilise une décomposition en éléments simples, et on ré-écrit

$$\frac{2x+41}{-x^2+x+12} = \frac{-7}{x-4} + \frac{5}{x+3}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_5^7 \frac{2x+41}{-x^2+x+12} dx &= \int_5^7 \frac{-7}{x-4} + \frac{5}{x+3} dx \\ &= (-7 \ln(x-4) + 5 \ln(x+3)) \Big|_{x=5}^7 \\ &= -7 \ln(3) + 5 \ln(10) - 5 \ln(8). \end{aligned} \quad (3 \text{ points})$$

2. On a :

$$\begin{aligned} &\int_0^{3\pi/2} \sqrt{1-(\sin(x))^2} e^{-\sin(x)} dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-(\sin(x))^2} e^{-\sin(x)} dx + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sqrt{1-(\sin(x))^2} e^{-\sin(x)} dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos(x) e^{-\sin(x)} dx + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} -\cos(x) e^{-\sin(x)} dx \\ &= (-e^{-\sin(x)}) \Big|_{x=0}^{\pi/2} + (e^{-\sin(x)}) \Big|_{x=\pi/2}^{3\pi/2} \\ &= 1 + e - \frac{2}{e}. \end{aligned} \quad (3 \text{ points})$$

Exercice 2 : (6 points)

Soit $A : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$A(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

Montrer que A est bijective, en montrant qu'elle est à la fois injective et surjective.

Indication : On pourra utiliser sans démonstration le fait que, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $r \in \mathbb{R}$, $A(x^r) = rA(x)$.

Correction : (vu en cours)

- On commence par montrer que A est injective.
On remarque que

$$A'(x) = \frac{1}{x} > 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*. \quad (1 \text{ point})$$

Ceci implique que A est strictement croissante, et donc injective.

- Montrons ensuite que A est surjective. Pour ceci, on commence par prouver que

$$(i) \lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = +\infty \quad \text{et} \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 0^+} A(x) = -\infty. \quad (1 \text{ point})$$

(i) Pour $x \geq 2^n$, $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} A(x) &= \int_1^x \frac{1}{t} dt \\ &\geq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} + \frac{1}{2^n} \\ &\geq \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1} + 1} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) \\ &\geq \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + \dots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} \\ &\geq \frac{n}{2}. \end{aligned} \quad (2 \text{ points})$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2} = +\infty.$$

(ii) On a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} A(x) = \lim_{z \rightarrow +\infty} A(z^{-1}) = \lim_{z \rightarrow +\infty} (-1) \cdot A(z), \quad (1 \text{ point})$$

où on a fait le changement de variable $x = z^{-1}$ et utilisé l'indication. En utilisant le point (i) montré ci-dessus, on conclut donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} A(x) = - \lim_{z \rightarrow +\infty} A(z) = -\infty.$$

La fonction A est donc une fonction continue (primitive d'une fonction continue) telle que $\lim_{x \rightarrow 0^+} A(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = +\infty$. Par le théorème de la valeur intermédiaire, on en conclut donc que pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $A(x) = y$, i.e. A est surjective.
(1 point)

Exercice 3 : (8 points)

A partir du temps $t = 0$, on verse de l'eau dans une casserole initialement vide avec un débit $d(t) = (2t - t^2)$ litres par minute. La casserole est chauffée. A partir du temps $t = 1$ minute, une partie de l'eau s'évapore à une vitesse $v(t) = 0.1t$ litres par minute.

1. Donner l'expression de $V(t)$, le volume d'eau contenu dans la casserole, pour $t \in [0, 2]$ minutes.
2. Que vaut $V(2)$?
3. A quel moment le volume d'eau contenu dans la casserole est-il maximal?

Correction : (exercice vu en série, évaporation en moins)

1. Le volume d'eau contenu dans la casserole au temps t est donné par l'intégrale entre 0 et t du débit net (eau versée - eau évaporée). (1 point)

On distingue les cas $t \leq 1$ et $t > 1$: (1 point distinction + bornes)

- Pour $t \leq 1$, le volume d'eau contenu dans la casserole est donné par

$$\begin{aligned} V(t) &= \int_0^t d(s) \, ds \\ &= \int_0^t (2s - s^2) \, ds \\ &= \left(s^2 - \frac{1}{3}s^3 \right) \Big|_{s=0}^t \\ &= t^2 - \frac{1}{3}t^3. \end{aligned} \quad (1 \text{ point})$$

- Pour $t > 1$, le volume d'eau contenu dans la casserole est donné par

$$\begin{aligned} V(t) &= \int_0^t d(s) \, ds - \int_1^t v(s) \, ds \\ &= \int_0^t (2s - s^2) \, ds - \int_1^t 0.1s \, ds \\ &= \left(s^2 - \frac{1}{3}s^3 \right) \Big|_{s=0}^t - \frac{1}{20}s^2 \Big|_{s=1}^t \\ &= \frac{19}{20}t^2 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{20}. \end{aligned} \quad (1 \text{ point})$$

2.

$$V(2) = \frac{19}{20} \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot 8 + \frac{1}{20} = \frac{228 - 160 + 3}{60} = \frac{71}{60}. \quad (1 \text{ point})$$

Après 2 minutes, la casserole contient $\frac{71}{60}$ litres d'eau.

3. • Pour $t < 1$

$$V'(t) = 2t - t^2 \geq 0 \text{ si } t < 1.$$

Sur l'intervalle $[0, 1]$, V atteint donc son minimum en 0 et son maximum en 1.
(1 point)

- Pour $t > 1$,

$$V'(t) = \frac{19}{10}t - t^2 = t \left(\frac{19}{10} - t \right)$$
$$V''(t) = \frac{19}{10} - 2t.$$

La dérivée de V s'annule donc pour $t = 1.9$ et puisque $V''(1.9) < 0$, c'est un maximum local. (1 point)

Finalement, $V(1.9) > V(1)$, et le volume d'eau contenu dans la casserole est maximal au temps $t = 1.9$ minutes. (1 point)

Exercice 4 : (10 points)

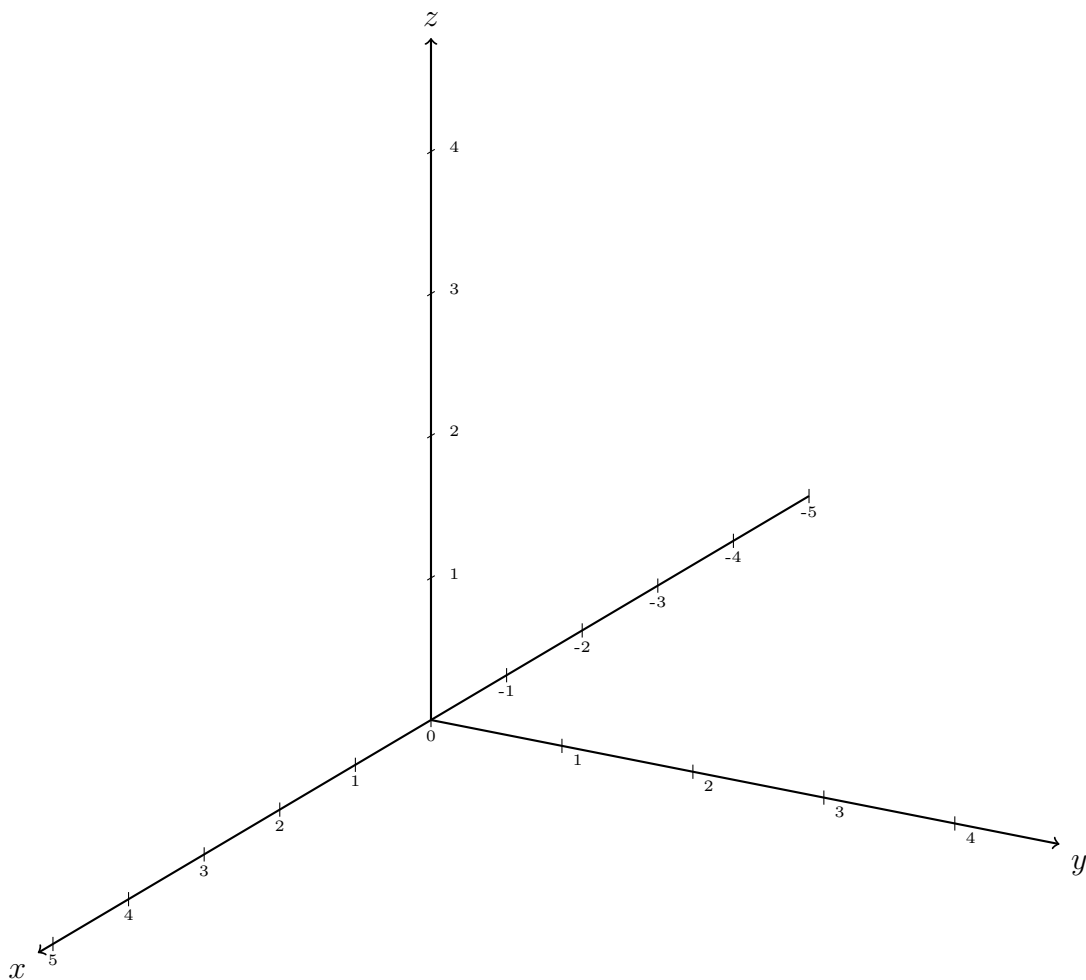
On considère le solide $\mathcal{S}$

- ayant pour base le domaine fermé du plan Oxy délimité par l'axe Ox et la courbe d'équation

$$y = \sqrt{16 - x^2};$$

- ayant pour sections perpendiculaires à l'axe Ox des triangles rectangles isocèles dont l'angle droit est situé sur l'axe Ox .

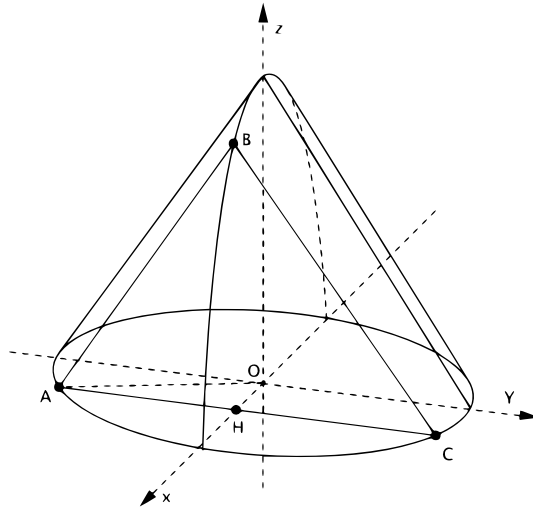
1. Dans le repère ci-dessous, esquisser le solide $\mathcal{S}$.



2. Calculer le volume du solide $\mathcal{S}$, en définissant une intégrale appropriée grâce aux sommes de Riemann, et en justifiant l'existence de cette intégrale.

Correction :

1.



2. On considère la partition régulière d'ordre n de $[-4, 4]$, $\sigma_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. On découpe le volume en tranches T_i , $i = 1, \dots, n$.

La base de la tranche T_i est un triangle isocèle rectangle, dont les sommets sont les points $(x_i, 0, 0)$, $(0, y_i, 0)$, $(0, 0, z_i)$, et dont l'angle droit est situé au point $(x_i, 0, 0)$. La tranche T_i a une épaisseur $\delta_i = (x_{i+1} - x_i)$. (1 point)

Le point $(0, y_i, 0)$ appartient à la courbe d'équation $y = \sqrt{16 - x^2}$ contenue dans le plan Oxy , d'où $y_i = \sqrt{16 - x_i^2}$. Le triangle étant isocèle, $z_i = y_i$. (1 point).

Les cathètes du triangle isocèle ont donc une longueur

$$\ell_i = y_i = \sqrt{16 - x_i^2} \quad (1 \text{ point})$$

et l'aire du triangle isocèle correspondant est

$$A_i = \frac{\ell_i^2}{2} = \frac{1}{2}(16 - x_i^2). \quad (1 \text{ point})$$

Le volume de $\mathcal{S}$ est donné par

$$\begin{aligned} V &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A_i \delta_i \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(16 - x_i^2) \delta_i. \end{aligned} \quad (1 \text{ point})$$

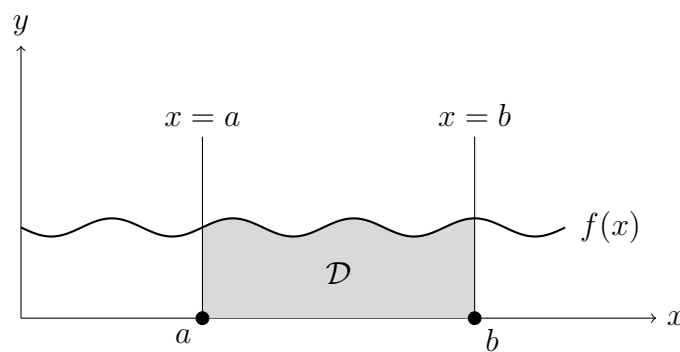
L'expression ci-dessus est une somme de Riemann pour la fonction $f(x) = \frac{1}{2}(16 - x^2)$, qui est continue, et donc intégrable sur l'intervalle $[-4, 4]$. (1 point)

Ainsi

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{-4}^4 \frac{1}{2}(16 - x^2) dx \\
 &= \frac{1}{2} \left(16x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{x=-4}^4 \quad (2 \text{ points}) \\
 &= \frac{128}{3}.
 \end{aligned}$$

Exercice 5 : (8 points)

Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a, b]$, avec $a \geq 0$. On note $\mathcal{D}$ le domaine borné délimité par le graphe de f , l'axe Ox et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$.



1. Montrer que le volume V du solide obtenu en faisant tourner $\mathcal{D}$ autour de l'axe Oy est donné par

$$V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) dx.$$

Pour ceci, définir une intégrale appropriée grâce aux sommes de Riemann, et justifier l'existence de cette intégrale.

Indication :

Considérer une partition $\sigma_n = \{x_0, \dots, x_n\}$ de l'intervalle $[a, b]$. Découper le volume en tubes cylindriques T_i , $i = 1, \dots, n$, obtenus en faisant tourner autour de l'axe Oy les rectangles délimités par les droites verticales $x = x_i$, $x = x_{i+1}$ et les droites horizontales $y = 0$ et $y = f(\gamma_i)$, avec $\gamma_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$.

2. Utiliser le résultat ci-dessus pour calculer le volume du solide engendré en faisant tourner autour de l'axe Oy le domaine $\mathcal{D}$ délimité par l'axe Ox , le graphe de la fonction $f(x) = \ln(x)$ et les droites verticales d'équation $x = 1$ et $x = e$.

Correction : (idée des tubes déjà vue en cours, mais sinon nouveau)

1. Le volume de la tranche cylindrique T_i telle que décrite dans l'indication est donné par

$$\begin{aligned} V_i &= \pi x_{i+1}^2 f(\gamma_i) - \pi x_i^2 f(\gamma_i) \\ &= \pi f(\gamma_i)(x_{i+1} + x_i)(x_{i+1} - x_i) \\ &= 2\pi \gamma_i f(\gamma_i) \delta_i. \end{aligned} \quad (2 \text{ points})$$

Le volume du solide est donné par

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2\pi \gamma_i f(\gamma_i) \delta_i. \quad (1 \text{ point})$$

L'expression ci-dessus est une somme de Riemann pour la fonction $g(x) = 2\pi x f(x)$. Puisque f est continue sur l'intervalle $[a, b]$, g l'est aussi, et elle est donc intégrable.

(1 point)

Ainsi

$$V = \int_a^b g(x) \, dx = \int_a^b 2\pi x f(x) \, dx,$$

qui est bien le résultat voulu. (1 point)

2. Par le point 1., le volume cherché est donné par

$$\begin{aligned} V &= \int_1^e 2\pi x \ln(x) \, dx \\ &= \dots \\ &= \frac{1}{2}(1 + e^2). \end{aligned} \quad (3 \text{ points})$$