

Test du module 1 : Intégration

Durée du test : 90 minutes

Matériel autorisé : Aucun

PRÉNOM :

NOM :

Nombre de points : /38

Note :

Exercice 1 : (6 points)

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_5^7 \frac{2x + 41}{-x^2 + x + 12} dx$
2. $\int_0^{3\pi/2} \sqrt{1 - (\sin(x))^2} e^{-\sin(x)} dx.$

Exercice 2 : (6 points)

Soit $A : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$A(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

Montrer que A est bijective, en montrant qu'elle est à la fois injective et surjective.

Indication : On pourra utiliser sans démonstration le fait que, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $r \in \mathbb{R}$, $A(x^r) = rA(x)$.

Exercice 3 : (8 points)

A partir du temps $t = 0$, on verse de l'eau dans une casserole initialement vide avec un débit $d(t) = (2t - t^2)$ litres par minute. La casserole est chauffée. A partir du temps $t = 1$ minute, une partie de l'eau s'évapore à une vitesse $v(t) = 0.1t$ litres par minute.

1. Donner l'expression de $V(t)$, le volume d'eau contenu dans la casserole, pour $t \in [0, 2]$ minutes.
2. Que vaut $V(2)$?
3. A quel moment le volume d'eau contenu dans la casserole est-il maximal ?

Exercice 4 : (10 points)

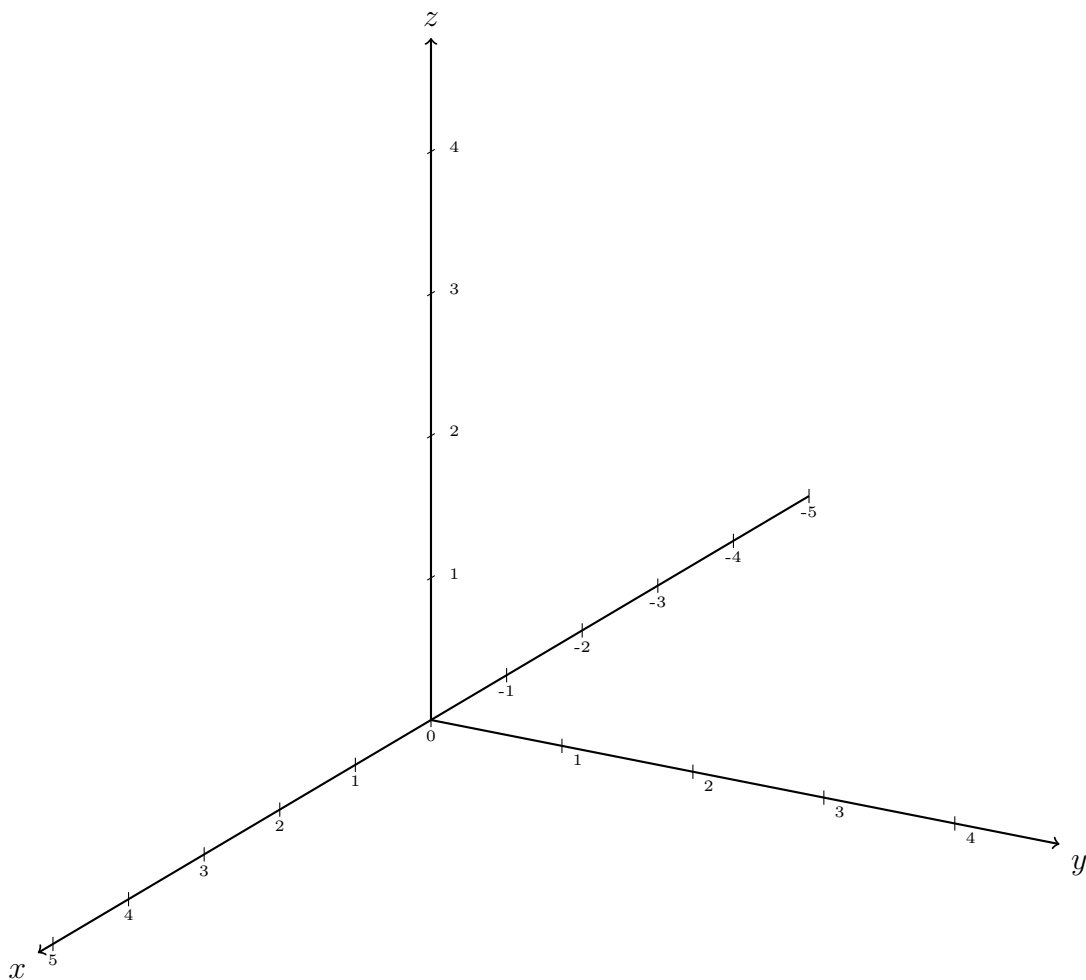
On considère le solide $\mathcal{S}$

- ayant pour base le domaine fermé du plan Oxy délimité par l'axe Ox et la courbe d'équation

$$y = \sqrt{16 - x^2};$$

- ayant pour sections perpendiculaires à l'axe Ox des triangles rectangles isocèles dont l'angle droit est situé sur l'axe Ox .

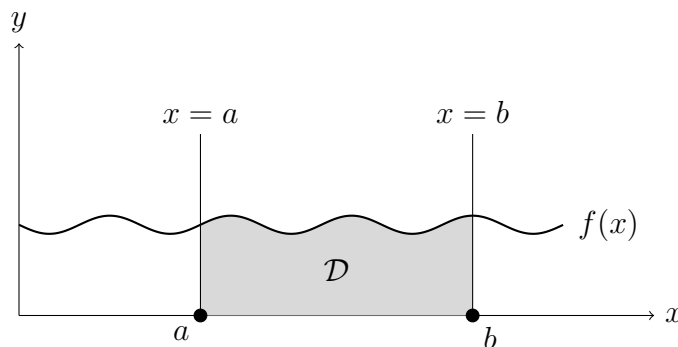
1. Dans le repère ci-dessous, esquisser le solide $\mathcal{S}$.



2. Calculer le volume du solide $\mathcal{S}$, en définissant une intégrale appropriée grâce aux sommes de Riemann, et en justifiant l'existence de cette intégrale.

Exercice 5 : (8 points)

Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a, b]$, avec $a \geq 0$. On note $\mathcal{D}$ le domaine borné délimité par le graphe de f , l'axe Ox et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$.



1. Montrer que le volume V du solide obtenu en faisant tourner $\mathcal{D}$ autour de l'axe Oy est donné par

$$V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) dx.$$

Pour ceci, définir une intégrale appropriée grâce aux sommes de Riemann, et justifier l'existence de cette intégrale.

Indication :

Considérer une partition $\sigma_n = \{x_0, \dots, x_n\}$ de l'intervalle $[a, b]$. Découper le volume en tubes cylindriques T_i , $i = 1, \dots, n$, obtenus en faisant tourner autour de l'axe Oy les rectangles délimités par les droites verticales $x = x_i$, $x = x_{i+1}$ et les droites horizontales $y = 0$ et $y = f(\gamma_i)$, avec $\gamma_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$.

2. Utiliser le résultat ci-dessus pour calculer le volume du solide engendré en faisant tourner autour de l'axe Oy le domaine $\mathcal{D}$ délimité par l'axe Ox , le graphe de la fonction $f(x) = \ln(x)$ et les droites verticales d'équation $x = 1$ et $x = e$.