

Ens: S. Basterrechea
Analyse I - ANON
12 janvier 2026
3h30

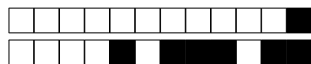
AN-0

I have no name

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
 - +3 points si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
 - +1 point si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant·e se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes Read these guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien					
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen		ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen		Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren	
					
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte					
					



Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 :

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels non-nuls telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 4$, et soit la série avec paramètre $t \in \mathbb{R}$ donnée par

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{9^{nt}}$$

Alors cette série

- ☐ converge pour $t = 1$ et pour $t = \frac{1}{2}$
☐ diverge pour $t = 1$ et converge pour $t = \frac{1}{2}$
☐ diverge pour $t = 1$ et pour $t = \frac{1}{2}$
☒ converge pour $t = 1$ et diverge pour $t = \frac{1}{2}$

Question 2 :

Soit $z = 1 + i$. Alors $z^{28} + (\bar{z})^{28}$ est égal à

- ☐ 2^{28} ☐ 2^{29} ☐ -2^{14} ☒ -2^{15}

Question 3 :

Soit $f: [1, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$ la fonction bijective définie par

$$f(x) = (\ln(x))^2 + 3 \ln(x) + 1$$

et soit $f^{-1}: [1, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$ sa fonction réciproque. Alors $(f^{-1})'(5)$ est égal à

- ☒ $\frac{e}{5}$ ☐ $\frac{e}{2e+3}$ ☐ $\frac{1}{\frac{1}{3} \ln(6) + \frac{1}{2}}$ ☐ $\frac{5}{2 \ln(5) + 3}$

Question 4 :

Soit $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x \cos(x)$. Alors l'ensemble image de f est

- ☒ $[f(\frac{5\pi}{4}), f(2\pi)]$ ☐ $[f(\frac{5\pi}{4}), f(\frac{\pi}{4})]$ ☐ $[f(0), f(2\pi)]$ ☐ $[f(\frac{7\pi}{6}), f(2\pi)]$

Question 5 :

L'intégrale $\int_0^{\pi/3} x \sin(2x) dx$ vaut

- ☒ $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}$ ☐ $-\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}$ ☐ $\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ ☐ $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4}$

Question 6 :

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$ et $f: \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$. La définition de

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

est

- ☐ $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall \delta > 0$ et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ on a $|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$
☒ $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ on a $|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$
☐ $\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ on a $|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$
☐ $\exists \delta > 0$ tel que $\forall \varepsilon > 0$ et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ on a $|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

**Question 7 :**

Soit $f:]0, 1[\cup]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \cos \left(\arctan \left(\frac{1}{\ln(x)} \right) \right)$$

Alors, en $x = 1$,

- ☐ f admet un prolongement par continuité $\tilde{f}:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\tilde{f}(1) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
☒ f admet un prolongement par continuité $\tilde{f}:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\tilde{f}(1) = 0$
☐ f n'admet pas de prolongement par continuité
☐ f admet un prolongement par continuité $\tilde{f}:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\tilde{f}(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Question 8 :

L'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 7x + 12} dx$

- ☐ converge et vaut 1 ☐ converge et vaut $\ln(7)$
☐ diverge ☒ converge et vaut $\ln\left(\frac{4}{3}\right)$

Question 9 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + \alpha n} - \sqrt{n^2 - 2n} \right) = 5$. Alors

- ☒ $\alpha = 8$ ☐ $\alpha = 0$ ☐ $\alpha = 3$ ☐ $\alpha = 5$

Question 10 :

Soit S l'ensemble défini par

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \{-\ln(2)\} : \frac{1}{2e^x - 1} > \frac{1}{3} \right\}$$

Alors

- ☒ $\sup(S) = \ln(2)$ ☐ S n'est pas minoré
☐ $\inf(S) = \ln(2)$ ☐ S n'est pas majoré

Question 11 :

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} n! e^{-n!} x^n$ est

- ☐ 0 ☐ $\frac{1}{e}$ ☒ infini ☐ e

Question 12 :

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par récurrence par $a_0 = 1$ et, pour $n \geq 0$,

$$a_{n+1} = 2 - \frac{1}{1 + a_n}$$

Alors

- ☐ la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ diverge ☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$
☒ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

**Question 13 :**

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ un paramètre et $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(x^3)}{x^{2k}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Alors, f est dérivable en 0 si et seulement si

☐ $k \leq 4$

☐ $k \leq 3$

☐ $k = 1$

☒ $k \leq 2$

Question 14 :

Le développement limité d'ordre 2 de $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ autour de $x_0 = 0$ est donné par

☐ $1 + x + x^2\varepsilon(x)$

☒ $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + x^2\varepsilon(x)$

☐ $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}x^2 + x^2\varepsilon(x)$

☐ $1 + x - \frac{1}{16}x^2 + x^2\varepsilon(x)$

Question 15 :

La série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$

☐ ne converge pas mais converge absolument

☐ converge et converge absolument

☐ converge mais ne converge pas absolument

☒ ne converge pas et ne converge pas absolument

Question 16 :

Pour toute fonction $f \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $f(0) = \frac{\pi}{2}$ et $f(1) = -\frac{\pi}{2}$, il existe $x \in]0, 1[$ tel que

☐ $f'(x) = -1$

☐ $\cos(f(x)) = 0$

☐ $f'(x) = 1$

☒ $\sin(f(x)) = 0$

Question 17 :

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par

$$a_n = \frac{(-1)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)}{2 + \tan\left(\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}\right)}$$

Alors

☒ $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{3}$

☐ $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{1}{3}$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

☐ $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$

☐ $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{1}{3}$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{3}$

Question 18 :

L'intégrale $\int_2^e \frac{\ln(2x)}{x \ln(x)} dx$ vaut

☐ $\ln(2)(1 - \ln(2))$

☐ $\ln(2) + 1 - \ln(\ln(2))$

☒ $1 - \ln(2)(1 + \ln(\ln(2)))$

☐ $\frac{1}{2}(1 - \ln^2(2))$



Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 19 :

Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite divergente. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = +\infty$.

☐ VRAI ☒ FAUX

Question 20 :

Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f n'est pas surjective.

☒ VRAI ☐ FAUX

Question 21 :

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$G(x) = \int_{-x}^x f(t) dt.$$

Alors $G'(0) = 0$.

☐ VRAI ☒ FAUX

Question 22 :

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$. Alors la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-2)^n$ converge pour $x = 2.3$.

☒ VRAI ☐ FAUX

Question 23 :

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dont le développement limité d'ordre 1 en $x_0 = 0$ est

$$f(x) = x + x\varepsilon(x).$$

Alors le développement limité d'ordre 5 en $x_0 = 0$ de la fonction $g(x) = (f(x))^5$ est

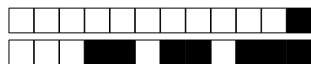
$$g(x) = x^5 + x^5\varepsilon(x).$$

☒ VRAI ☐ FAUX

Question 24 :

Soit $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ un polynôme de degré n à coefficients réels (i.e. $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$) et $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ ses racines. Alors $z_1 + z_2 + \dots + z_n \in \mathbb{R}$.

☒ VRAI ☐ FAUX



Question 25 :

Soit $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction monotone et bijective. Alors $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

☒ VRAI ☐ FAUX

Question 26 :

Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ deux ensembles non vides et bornés, tels que $A \cap B \neq \emptyset$. Alors

$$\sup(A \cap B) = \min \{ \sup(A), \sup(B) \}$$

☐ VRAI ☒ FAUX

Question 27 :

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $(f(x))^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors $f(x)$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$.

☐ VRAI ☒ FAUX

Question 28 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n}$ diverge.

☒ VRAI ☐ FAUX



Troisième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 29: Cette question est notée sur 3 points.

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☒ 3

Réservé au correcteur

Soient $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ deux suites telles que

$$(a_n)_{n \geq 0} \text{ est bornée, } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty \text{ et } b_n \neq 0, \forall n \geq 0.$$

Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

Méthode 1. Avec le théorème des deux gendarmes.

Puisque (a_n) est bornée, il existe $M > 0$ tel que

$$-M \leq a_n \leq M, \quad \forall n \geq 0.$$

Puisque $b_n \rightarrow +\infty$, il existe $N \geq 0$ tel que $b_n > 0$ pour tout $n \geq N$. Nous avons donc

$$\frac{-M}{b_n} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{M}{b_n}, \quad \forall n \geq N.$$

Enfin, puisque $b_n \rightarrow +\infty$, alors

$$\frac{\pm M}{b_n} \rightarrow 0,$$

ce qui permet d'appliquer le théorème des deux gendarmes, concluant ainsi la preuve.

Méthode 2. Avec la définition de limite.

Puisque (a_n) est bornée, il existe $M > 0$ tel que

$$|a_n| \leq M, \quad \forall n \geq 0.$$

Soit $\epsilon > 0$. Puisque $b_n \rightarrow +\infty$, il existe $N \geq 0$ tel que

$$b_n \geq \frac{M}{\epsilon} > 0, \quad \forall n \geq N.$$

Ainsi, si $n \geq N$, nous avons

$$\left| \frac{a_n}{b_n} \right| = \frac{|a_n|}{|b_n|} \leq \frac{M}{b_n} \leq \frac{M}{\frac{M}{\epsilon}} = \epsilon.$$

Ce qui conclut la preuve.



Question 30: Cette question est notée sur 5 points.

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5

Réservé au correcteur

Soit la série $(S_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$S_n := \sum_{k=0}^n \frac{k}{3^k}.$$

(a) A l'aide d'un critère vu au cours, montrer que (S_n) converge quand $n \rightarrow \infty$.

(b) Démontrer par récurrence que

$$S_n = \frac{3^{n+1} - 2n - 3}{4 \cdot 3^n}, \quad \forall n \geq 0.$$

(c) En déduire la valeur de

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{3^k}.$$

(a) (1 point) Nous appliquons la règle de d'Alembert :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{k} \cdot \frac{3^k}{3^{k+1}} = 1 \cdot \frac{1}{3} < 1.$$

Ainsi, la série converge.

(b) (3 points) *Initialisation* : si $n = 0$, nous avons d'une part

$$S_0 = \sum_{k=0}^0 \frac{k}{3^k} = 0,$$

d'autre part

$$\frac{3^{0+1} - 2 \cdot 0 - 3}{4 \cdot 3^0} = \frac{0}{4} = 0.$$

Ainsi, l'égalité est vraie pour $n = 0$.

Pas de récurrence : soit $n \geq 0$ et supposons que

$$S_n = \frac{3^{n+1} - 2n - 3}{4 \cdot 3^n}.$$

Montrons que

$$S_{n+1} = \frac{3^{n+2} - 2(n+1) - 3}{4 \cdot 3^{n+1}} = \frac{3^{n+2} - 2n - 5}{4 \cdot 3^{n+1}}.$$

Nous calculons

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + \frac{n+1}{3^{n+1}} \\ &= \frac{3^{n+1} - 2n - 3}{4 \cdot 3^n} + \frac{n+1}{3^{n+1}} \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &= \frac{3^{n+2} - 6n - 9}{4 \cdot 3^{n+1}} + \frac{4n+4}{4 \cdot 3^{n+1}} \\ &= \frac{3^{n+2} - 2n - 5}{4 \cdot 3^{n+1}}. \end{aligned}$$

(c) (1 point) De ce qui précède,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{3^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} - 2n - 3}{4 \cdot 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4} - \frac{n}{2 \cdot 3^n} - \frac{1}{4 \cdot 3^{n-1}} \right) = \frac{3}{4}.$$



Question 31: Cette question est notée sur 3 points.

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☒ 3

Réservé au correcteur

Soit la fonction $f :]0, \sqrt[4]{\pi}[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\cos(2x) + 2x^2 - 1}{\sin(x^4)}.$$

Prolonger f en une fonction continue sur $[0, \sqrt[4]{\pi}[$.

Soit la limite

$$L := \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

qui (si elle existe) nous permettra de prolonger f en la fonction continue $\tilde{f} : [0, \sqrt[4]{\pi}[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

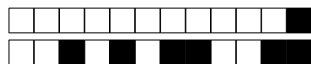
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } 0 < x < \sqrt[4]{\pi} \\ L & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Nous procédons avec des développements limités d'ordre 4 autour de $x_0 = 0$:

$$\begin{cases} \cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{4!} + x^4 \cdot \epsilon_1(x) = 1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} + x^4 \cdot \epsilon_1(x), \\ \sin(x^4) = x^4 + x^4 \cdot \epsilon_2(x), \\ \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \epsilon_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \epsilon_2(x) = 0. \end{cases}$$

Ainsi,

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} + x^4 \cdot \epsilon_1(x)) + 2x^2 - 1}{x^4 + x^4 \cdot \epsilon_2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2}{3} + \epsilon_1(x)}{1 + \epsilon_2(x)} = \frac{2}{3}.$$



Question 32: Cette question est notée sur 5 points.

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5

Réservé au correcteur

- (a) Énoncer le théorème des accroissements finis.
- (b) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Démontrer que

$$f \text{ constante sur } [a, b] \iff f' = 0 \text{ sur }]a, b[.$$

-
- (a) (**2 points**) Soit une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ (avec $a < b$). Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}.$$

- (b) ($\implies$) (**1 point**) Supposons que $f(x) = K$ pour tout $x \in [a, b]$. Alors pour tout $x \in]a, b[$,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{K - K}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

($\impliedby$) (**2 points**) Soient $x, y \in [a, b]$ tels que $x < y$.

Puisque f est continue sur $[x, y] \subset [a, b]$ et dérivable sur $]x, y[\subset]a, b[$, nous pouvons appliquer le théorème des accroissements finis qui nous donne $c \in]x, y[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

Or, par hypothèse, $f'(c) = 0$, ce qui implique que $f(x) = f(y)$. Vu que x et y sont quelconques, la fonction est constante.