

Série 2

Remarque. Cette série sert en particulier d'introduction aux remarquables cinq *solides platoniciens* : le tétraèdre régulier (dont les 4 faces sont des triangles équilatéraux), le cube, l'octaèdre régulier (dont les 8 faces sont des triangles équilatéraux), le dodécaèdre régulier (dont les 12 faces sont des pentagones réguliers), et l'icosaèdre (dont les 20 faces sont des triangles équilatéraux). Voici à quoi ressemblent ces deux derniers solides en perspective cavalière :



Exercice 1. Soient α et β deux plans qui forment un angle t entre eux (avec $0 < t < \frac{\pi}{2}$), $ABCD$ un carré appartenant à α , et $A'B'C'D'$ la projection orthogonale de $ABCD$ sur β .

- a) Dans le cas où AB est parallèle à la droite d'intersection d de α et β , montre que l'aire de la projection est obtenue en multipliant l'aire d'origine par $\cos(t)$:

$$\sigma(A'B'C'D') = \sigma(ABCD) \cdot \cos(t).$$

- b) Dédus que la projection orthogonale F' sur β d'une figure F de α possède une aire qui s'obtient en multipliant l'aire de F par $\cos(t)$:

$$\sigma(F') = \sigma(F) \cdot \cos(t).$$

Indication. La technique utilisée pour obtenir l'aire du disque peut être utile.

Exercice 2. Exprime la distance entre l'origine O et un point A de coordonnées $(a; b; c)$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3. On considère le **cube** dont les sommets ont pour coordonnées $(\pm 1; \pm 1; \pm 1)$ (il y a 8 sommets, et chaque sommet est donné par ses trois coordonnées qui valent chacune 1 ou -1).

- Représente ce cube sur du papier quadrillé en perspective cavalière.
- Quelle est la surface de chacune des faces du cube et quelle est la surface totale du cube ?
- Détermine l'angle entre des plans contenant deux faces adjacentes distinctes.
- Calcule la longueur de la diagonale du cube, c'est-à-dire la plus grande distance entre deux sommets.

Exercice 4. Les centres des faces d'un cube sont les sommets d'un solide appelé **octaèdre régulier**.

- Représente l'octaèdre régulier sur du papier quadrillé en perspective cavalière.
- Explique pourquoi ses faces sont des triangles équilatéraux.
- Calcule la surface de chacune des faces et la surface totale de l'octaèdre.
- Détermine les angles et les longueurs des côtés d'un triangle dont les sommets sont l'origine $(0; 0; 0)$, un sommet de l'octaèdre (disons $(0; 0; 1)$) et le milieu d'un côté opposé dans l'une des faces de l'octaèdre (disons celles du côté dont les sommets sont $(1; 0; 0)$ et $(0; 1; 0)$).
- Détermine l'angle entre des plans contenant deux faces adjacentes distinctes.

Exercice 5. Soit P un point de l'espace et α un plan. Démontre que pour tout point A du plan α , la distance $\overline{PA}$ est plus longue (ou égale) que la distance entre P et sa projection orthogonale sur α . Ceci justifie notre définition de distance entre un point et un plan.

Indication. Utilise le Théorème de Pythagore ou d'autres propriétés connues des triangles rectangles.

Exercice 6. On considère les quatre points dont les coordonnées dans $\mathbb{R}^3$ sont $(1; 1; 1)$, $(0; 0; 1)$, $(0; 1; 0)$ et $(1; 0; 0)$.

- Calcule la distance entre chaque paire de points.
- Dessine, à la règle et sur du papier quadrillé, en perspective cavalière et avec visibilité (les arêtes cachées en traitillés) les quatre points donnés et les six segments reliant chaque sommet à chacun des trois autres sommets. Complète ta figure en inscrivant le solide obtenu dans un cube (en pointillés par exemple) dont 4 des sommets sont confondus avec les points donnés.
- Sais-tu comment s'appelle ce solide? Quelle particularité ont les faces de ce solide?
- Calcule la distance h d'un sommet de ce polyèdre à la face opposée (tu devrais trouver $h = \frac{2}{3}\sqrt{3}$).

Exercice 7. Vrai ou faux? Justifie tes réponses!

- Le lieu géométrique des points de l'espace équidistants de deux points donnés est un plan.
- Soit $r > 0$. Le lieu géométrique des points de l'espace situés à la distance r d'un point donné est un cylindre.
- Soit $r > 0$. Le lieu géométrique des points de l'espace situés à la distance r d'une droite donnée est un cylindre.
- Dans l'espace deux droites qui ne se coupent pas sont parallèles.
- Dans l'espace deux plans qui ne se coupent pas sont parallèles.

Exercice 8. La caractéristique d'Euler. La caractéristique d'Euler d'un polyèdre est $F - A + S$, où F est le nombre de faces, A le nombre d'arêtes et S le nombre de sommets.

- Calcule la caractéristique d'Euler des cinq solides platoniciens. Calcule A , F et S dans chaque cas.
- Dessine le développement de la surface de ces cinq polyèdres.
- On considère le polyèdre obtenu à partir d'un cube découpé en 27 petits cubes de côté $1/3$ duquel on enlève le cube central. Calcule la caractéristique d'Euler de ce polyèdre.

Exercice 9. Comme Euclide en 300 av. J.-C., montre qu'il n'y a pas d'autres polyèdres réguliers que les polyèdres platoniciens.

Indication. Considère un sommet d'un polyèdre régulier et les faces qui le touchent; en coupant le polyèdre le long d'une arête, "aplatis" les faces du polyèdre autour de ce sommet dans un plan. Utilise que ces faces sont toutes des polygones réguliers du même type et que le polyèdre est convexe pour énumérer tous les arrangements possibles autour de ce sommet.

Exercice 10. Un solide est *convexe* si pour toute paire de points A et B du solide, le segment $[AB]$ entier est contenu dans le solide. L'*enveloppe convexe* d'un ensemble E de points est le plus petit ensemble convexe qui contient tous les points de E . Par exemple, l'enveloppe convexe de 4 points non coplanaires de l'espace est un tétraèdre.

Quel polyèdre obtient-on si l'on considère l'enveloppe convexe des milieux des douze faces du dodécaèdre régulier? Et si l'on considère l'enveloppe convexe des milieux des 20 faces de l'icosaèdre régulier? Et si on considère l'enveloppe convexe des milieux des quatre faces du tétraèdre régulier?