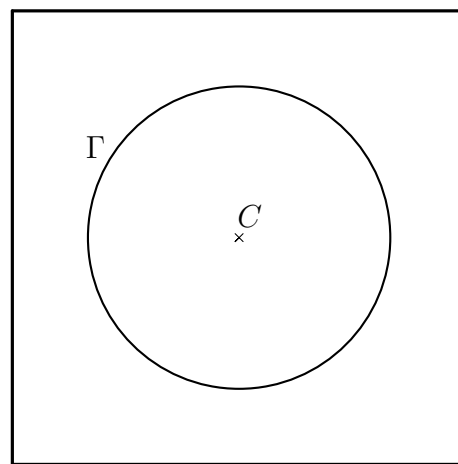
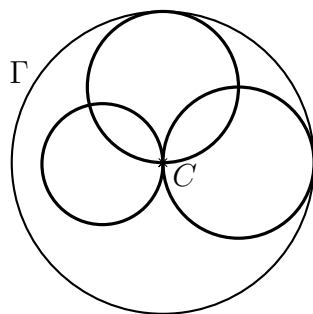
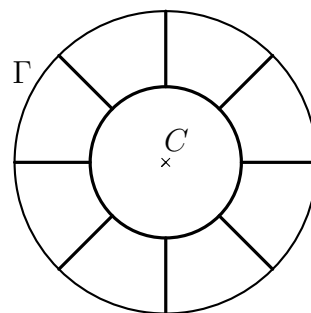
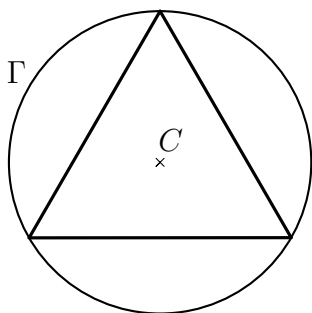


Série 31

Pour le 25 août 2027

Exercice 1

Inversion de droites et de cercles passant par le pôle.Esquisser les images par l'inversion de pôle C et de cercle d'inversion Γ des figures suivantes.

Exercice 2**Inversion de cercles tangents.**

Décrire l'image par l'inversion de pôle C et de cercle d'inversion Γ de deux cercles tangents dans chacun des cas suivants.

Illustrer le propos d'un dessin et expliquer les raisons du résultat dans chacun des cas suivants.

- a) Les deux cercles passent par le pôle d'inversion et sont tous deux tangents au cercle d'inversion.
- b) Les deux cercles passent tous deux par C , et leurs diamètres sont supérieurs au rayon de Γ .
- c) Les deux cercles passent tous deux par C , et leurs diamètres sont inférieurs au rayon de Γ .
- d) L'un des cercles passe par C , l'autre non. Tous deux sont intérieurs au cercle d'inversion.
- e) Les deux cercles sont extérieurs au cercle d'inversion.

Exercice 3**Angles.**

On considère un cercle de centre $(0;0)$ et de rayon 1 et une courbe $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Calculer dans chacun des cas suivants l'angle formé par le cercle et la courbe c en leur(s) point(s) d'intersection.

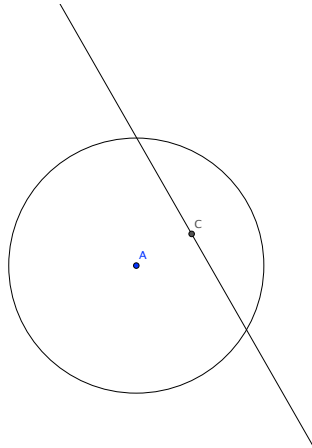
- a) $c(t) = (t, 2)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$;
- b) $c(t) = (t, 1)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$;
- c) $c(t) = (t, 0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$;
- d) $c(t) = (t, 1/2)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$;
- e) $c(t) = (t, t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$;

Exercice 4**Inversions.**

- a) Construire à la règle et au compas l'inverse de la droite donnée par rapport au cercle donné.

$||AC||$ est un demi-rayon du grand cercle.

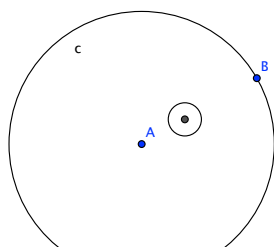
Écrire une marche à suivre



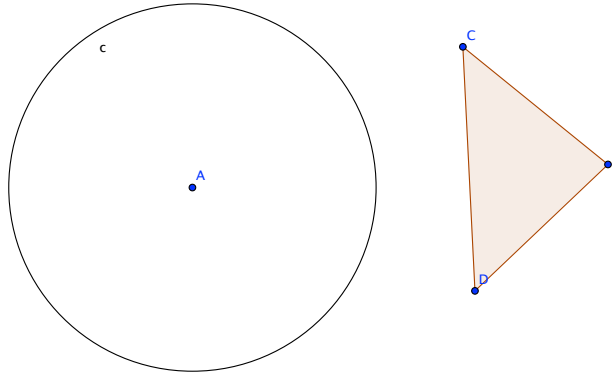
- b) Construire à la règle et au compas l'inverse du petit cercle par rapport au grand cercle donné.

Le diamètre du petit-cercle est un quart de rayon du grand.

Écrire une marche à suivre



- c) Construire à la règle et au compas l'inverse du triangle par rapport au cercle donné.
 Écrire une marche à suivre. Suggestion : utiliser des points des droites supportant les côtés du triangle dont les inverses sont facile à construire !



Exercice 5

Forme analytique des inversions.

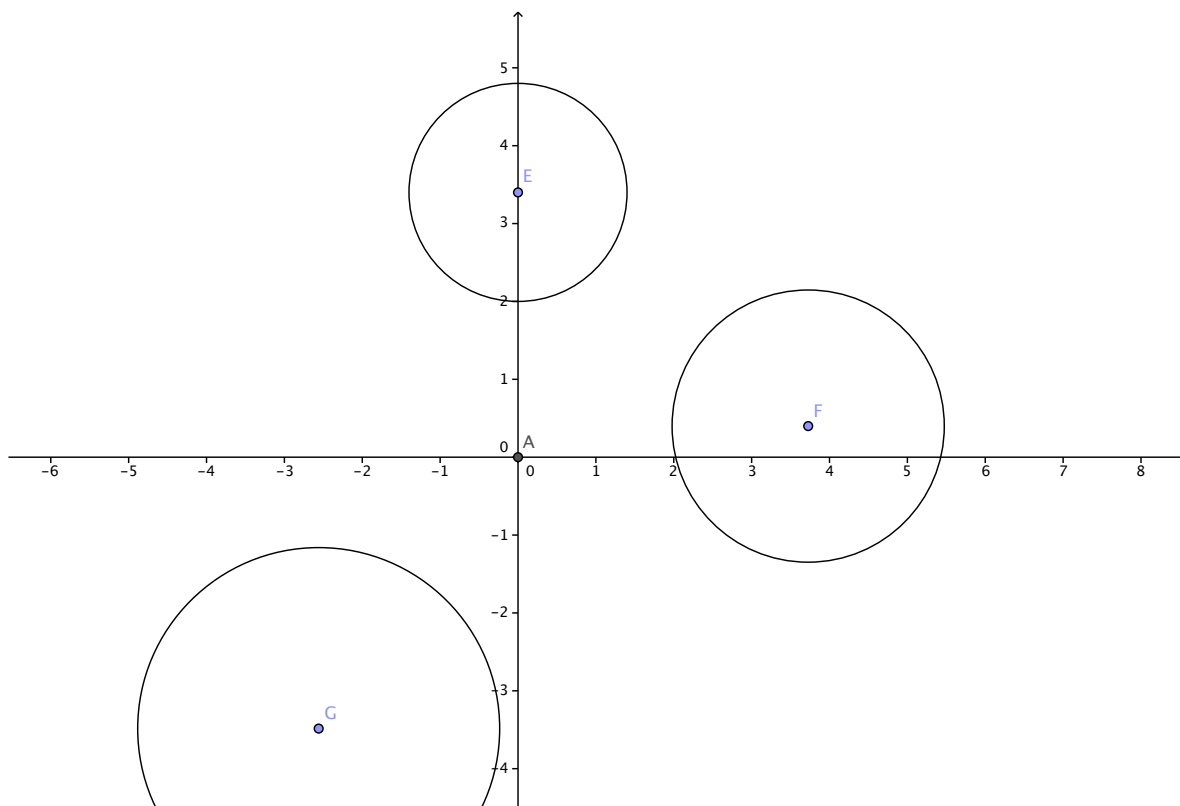
On considère l'inversion ι par rapport au cercle de centre $O = (0; 0)$ et de rayon r .

- Soit $P = (x; y)$ un point du plan. Quels sont les coordonnées de $\iota(P)$?
- Donner une interprétation géométrique (en termes d'inversion bien sûr !) à l'application définie sur $\mathbb{C}^*$ par $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$.
- On considère la composition $h = \iota' \circ \iota$ de deux inversions, où ι' est l'inversion de pôle O et de cercle d'inversion de rayon R . Calculer $h(x, y)$ analytiquement.
- Décrire h géométriquement.
- Déduire de cet exercice que les homothéties préservent les angles !

Exercice 6**Problème d'Appolonius.**

Résoudre le problème d'Appolonius dans la situation suivante.

Suggestion : utiliser un cercle d'inversion qui coupe les cercles à inverser de sorte que leurs images soit plus facile à construire.



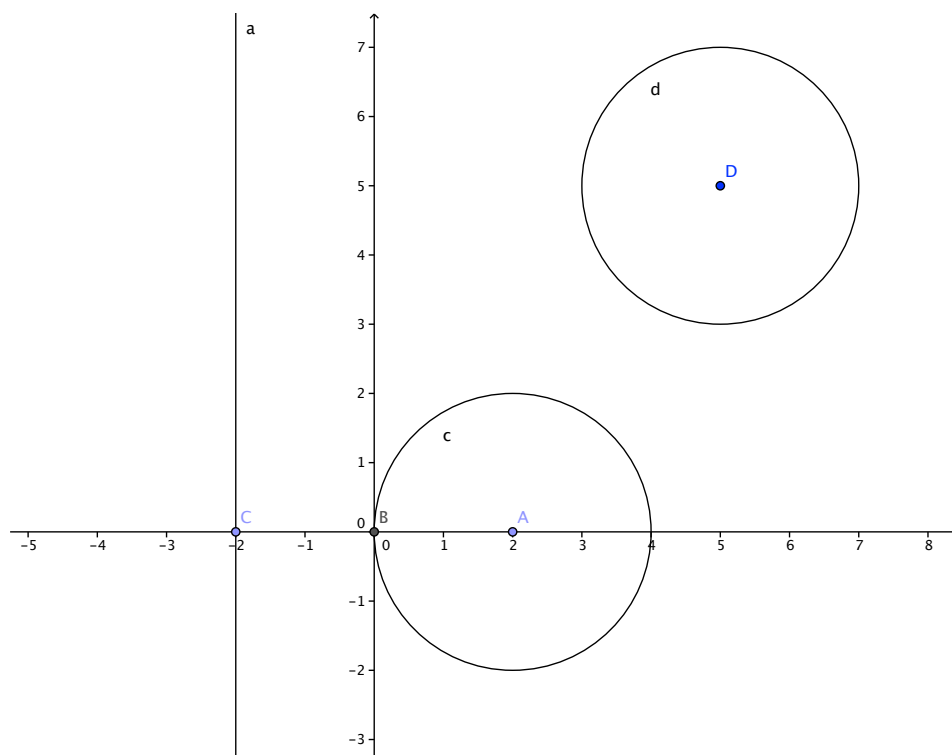
Exercice 7**Vrai ou faux ?**

Justifier brièvement tes réponses, avec un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

- a) Soit Γ un cercle. Un cercle dont le centre se trouve sur Γ ne coupe jamais Γ en un angle droit.
- b) Deux cercles de même rayon ne peuvent pas se couper en un angle de $\pi/3$.
- c) L'inversion du cercle inscrit d'un triangle est un cercle circonscrit au triangle image.
- d) Les inverses de deux cercles concentriques sont deux cercles concentriques.
- e) Les inverses de deux cercles concentriques ne sont jamais deux cercles concentriques.

Exercice 8

Résous le problème d'Apollonius dans le cas suivant (on cherche donc un cercle tangent simultanément à la droite a et aux cercles c et d :



Exercice 9

Existe-t-il une situation pour laquelle le problème d'Apollonius n'a pas de solution ? Si oui, laquelle ?

Exercices théoriques**Exercice 10**

La projection stéréographique. On pose une sphère S^2 sur un plan horizontal $\mathcal{H}$, si bien qu'elle lui est tangente en son pôle sud S . La projection stéréographique p est la projection centrale de la sphère sur le plan à partir de son pôle nord N . Ainsi pour un point X de la sphère (avec $X \neq N$) l'image $p(X)$ est le point d'intersection de la droite NX avec le plan horizontal.

- a) Dessine une illustration soignée de la situation.
- b) Montre que p définit une bijection $p : S^2 - \{N\} \rightarrow \mathcal{H}$ de la sphère privée de son pôle nord avec le plan $\mathcal{H}$.
- c) Définis ce qu'est une inversion dans l'espace de pôle N et de sphère d'inversion Σ .
- d) Dans le cas où le pôle d'inversion est N et Σ est la sphère d'inversion de centre N et de rayon $[NS]$, montre que la restriction de l'inversion à la sphère S^2 est précisément la projection stéréographique.
- e) Montre que la projection stéréographique transforme les cercles de S^2 passant par N en des droites.
- f) Montre que la projection stéréographique transforme les cercles de S^2 ne passant pas par N en des cercles.