

Série 21

Pour le 10 mars 2027

Exercice 1

Somme des carrés. Montre que

$$\frac{n^3}{3} \leq \sum_{k=1}^n k^2 \leq \frac{(n+1)^3}{3}$$

pour tout $n \geq 1$.

- a) Vérifie que les deux inégalités sont vraies pour $n = 1$ et $n = 2$.
- b) Montre chaque inégalité séparément par récurrence en écrivant soigneusement quelle est l'hypothèse de récurrence et où tu l'utilises.

Exercice 2

Trissection des angles. Il est impossible d'effectuer la construction du tiers d'un angle θ donné à la règle et au compas (Wantzel, 1837). Le but de cet exercice est de montrer que la construction est possible avec une règle, un compas et une spirale d'Archimède !

On se donne donc cette spirale d'équation polaire $r = \phi$. Un angle θ est donné par le demi-axe Ox positif et une demi-droite issue de l'origine (l'angle est lu dans le sens trigonométrique). Cette demi-droite coupe la spirale en un point P et on trace le cercle de centre O et de rayon $\frac{|OP|}{3}$. Ce cercle coupe la spirale en un point Q .

Montre que la demi-droite $[OQ]$ détermine un angle de $\theta/3$ avec le demi-axe positif Ox . Aide-toi d'un dessin.

Indication : En coordonnées cartésiennes, les points de la spirale s'écrivent $(\phi \cos(\phi), \phi \sin(\phi))$.

Exercice 3

Une fonction non intégrable. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ et σ une subdivision quelconque de $[0, 1]$.

- a) Calcule $s_\sigma(f)$ et $S_\sigma(f)$.
- b) Calcule $s(f)$ et $S(f)$.
- c) Conclue que $s(f) \neq S(f)$ et donc que f n'est pas intégrable.

Exercice 4

L'intégrale définie d'une fonction affine. On considère la fonction $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{2} + 1$. On cherche à calculer l'aire de la région comprise entre Ox et le graphe de cette fonction.

- a) Écris explicitement la subdivision régulière σ_n de $[0, a]$ d'ordre n .
- b) Détermine le minimum m_i et le maximum M_i de f sur l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ et justifie les réponses.
- c) Calcule l'aire du rectangle de base $[x_{i-1}, x_i]$ et de hauteur m_i (puis celui de hauteur M_i).
- d) Calcule les sommes de Darboux inférieure et supérieure de f pour σ_n .
- e) Calcule la limite de ces sommes de Darboux lorsque n tend vers l'infini.
- f) Conclue que f est intégrable et que l'aire de la région cherchée est $\frac{a^2}{4} + a$.
- g) Retrouve cette même valeur par un argument géométrique.

Exercice 5

Vrai ou faux ? Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

- a) Une fonction intégrable est continue.
- b) Toutes les fonctions sont intégrables.

- c) Une fonction intégrable est bornée.
- d) Si f est bornée et définie sur $[a, b]$ et que $s(f)$ et $S(f)$ existent, alors $s(f) = S(f)$.
- e) Les nombres $1/64 < 1/32 < 1/16 < 1/8 < 1/4 < 1/2 < 1$ forment une subdivision de $[0, 1]$.
- f) Les nombres $0 < 1/64 < 1/32 < 1/16 < 1/8 < 1/4 < 1/2 < 1$ forment une subdivision de $[0, 1]$.
- g) Les nombres $0 < 1/64 < 1/32 < 1/16 < 1/8 < 1/4 < 1/2 < 1$ forment une subdivision de $[0, 1]$ de pas $1/64$.
- h) Les nombres $0 < 1/64 < 1/32 < 1/16 < 1/8 < 1/4 < 1/2 < 1$ forment une subdivision de $[0, 1]$ de pas $1/2$.
- i) Archimède était italien.

Exercice 6

La fonction exponentielle. Soient $a < b$ deux nombres réels. Calcule $\int_a^b e^x dx$ en suivant la méthode du cours (avec les sommes de Darboux inférieures).

- a) Calcule la somme de Darboux inférieure de e^x pour la subdivision régulière σ_n d'ordre n .
- b) Calcule la limite $s(f)$ en utilisant les σ_n .
- c) Explique pourquoi $s(f) = \int_a^b e^x dx$.

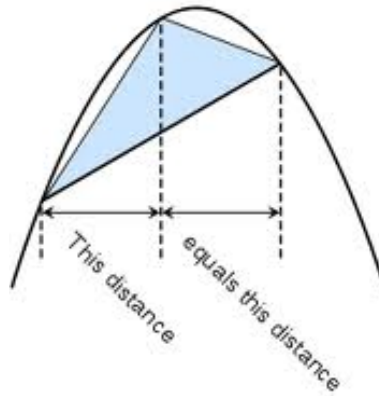
Exercice 7

Une fonction non continue et intégrable. Montre que la fonction réelle définie sur $[0, 2]$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ est intégrable sur $[0, 2]$, mais non continue en 1.

Exercices théoriques

Exercice 8

Le secteur de parabole d'après Archimède. On considère la parabole d'équation $y = -x^2$ et le secteur compris entre la parabole et la droite passant par deux points $A = (a, -a^2)$ et $B = (b, -b^2)$. On suppose que $a < b$.



- Calcule les coordonnées du point C de la parabole dont l'abscisse vaut $\frac{a+b}{2}$ et montre que l'aire du triangle $\triangle ABC$ vaut $S = \frac{(b-a)^3}{8}$. Effectue un dessin de la situation.
- On considère maintenant les points D et E construits comme C à partir de A et C et C et B (on coupe l'intervalle $[a, b]$ en deux, puis maintenant en quatre...). Montre que les aires des triangles $\triangle ACD$ et $\triangle BCE$ sont égales et valent chacune $S/8$.
- Montre que l'aire du secteur de parabole est plus grande que $S + \frac{S}{4} + \frac{S}{16} + \dots + \frac{S}{4^n}$ pour tout n .
- Montre que l'aire du secteur de parabole vaut $\frac{(b-a)^3}{6}$.