

Série 18

Pour le 3 février 2027

Exercice 1

Mets la matrice suivante (à coefficients réels) sous forme échelonnée et réduite à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Calcule toutes les solutions du système linéaire suivant (aide-toi de l'exercice 1) :

$$\begin{cases} 4x + 8y + 4z + 8t + u = 9 \\ x + 2y + z + 2t = 1 \\ x + 2y + 2z + 5t + u = 6 \end{cases}$$

Exercice 3

Calcule toutes les solutions des systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} 4x + 4y + z = 2 \\ x + y = -7 \\ x + 2y + z = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} -x + 13y - 7z = 0 \\ 2x - y + 4z = -1 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie $f(x, y, z) = (x + y + z, x - 2y)$.

On rappelle de la série 17 que $g_1 = (1; 0; 0)$, $g_2 = (0; 0; 1)$ et $g_3 = (-2; 1; 1)$ forment une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ et que $u_1 = (1; 1)$ et $u_2 = (1; 0)$ forment une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$.

- a) Calcule la matrice de changement de base Q de $\mathcal{B}$ vers la base canonique de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire la matrice $(Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}an}$.

Indication. Cette matrice est facile à construire puisque ses colonnes donnent les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base $\mathcal{B}$ exprimés dans la base canonique.

- b) Calcule la matrice de changement de base P de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathcal{C}$, c'est-à-dire la matrice $(Id)_{\mathcal{C}an}^{\mathcal{C}}$.

Indication. Cette matrice est plus difficile à construire puisque ses colonnes donnent l'expression des vecteurs de la base canonique écrits comme combinaison linéaire des vecteurs de la nouvelle base $\mathcal{C}$.

- c) Calcule la matrice B de f par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ grâce à la formule du changement de base (qui fait intervenir un produit de trois matrices).

Exercice 5

Vrai ou faux ? Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

- a) Une matrice de changement de base est carrée.
- b) Si on travaille sur un corps fini $K = \mathbb{F}_p$ et avec l'espace vectoriel K^n , il n'y a qu'un nombre fini de matrices de changement de base.
- c) Il existe une matrice de $M_{2 \times 7}(\mathbb{C})$ dont le rang vaut 3.
- d) Il existe une matrice de $M_{3 \times 5}(\mathbb{C})$ dont le rang vaut 3.
- e) Soit $\alpha : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\beta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^5$. On choisit les bases canoniques et on construit les matrices A de α et B de β . Alors le rang de la matrice $BA \in M_5(\mathbb{R})$ est le même que celui de la matrice $AB \in M_2(\mathbb{R})$.

- f) La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée et réduite.

Exercice 6

Mets la matrice suivante, à coefficients dans $\mathbb{R}$, sous forme échelonnée à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

Calcule son rang en fonction des paramètres a, b, c .

Exercice 7

Calcule la dimension du sous-espace vectoriel $W = \{p(x) \in \mathbb{R}[x]^{\leq 3} \mid p(1) = 0, p(2) = p(3)\}$ de $\mathbb{R}[x]^{\leq 3}$. Vérifie ensuite que $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 2$ appartient à W et trouve une base de W qui te permette d'exprimer $p(x)$ facilement dans cette base.

Exercice 8

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 16 \\ 24 \\ 8 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ a \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \\ u \end{pmatrix}$.

- a) Résous le système $AX = B$.
- b) Résous le système $AX = C$ en fonction des valeurs du paramètre a .

Exercices théoriques**Exercice 9**

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ une matrice *carrée*.

Montre que les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

- (1) Le système d'équations linéaire et homogène formé des n équations $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0$ pour $1 \leq i \leq n$ admet une unique solution (laquelle?).

Indication. Le système d'équations $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0$ revient à l'équation vectorielle $Ax = 0$.

- (2) Pour tous $b_1, \dots, b_n \in K$, il existe une solution au système linéaire formé des n équations $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$.

Indication. On peut par exemple montrer que b) implique a) par contraposée.

Exercice 10

La transposée. Soit $A \in M_{n \times m}(K)$. On définit la matrice *transposée* $A^t \in M_{m \times n}(K)$ en échangeant le rôle des lignes et des colonnes : dans la i -ème ligne et j -colonne de A^t le coefficient $(A^t)_{ij} = a_{ji}$.

- Calcule la transposée de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.
- Montre que l'application "transposition" $M_{n \times m}(K) \rightarrow M_{m \times n}(K)$ est linéaire.
- Montre que $(A^t)^t = A$.
- Montre que la transposition définit un isomorphisme K -linéaire entre $M_{n \times m}(K)$ et $M_{m \times n}(K)$.
- Détermine l'ensemble des matrices appartenant à $M_n(K)$ qui vérifient $A^t = A$. Montre qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel W de $M_n(K)$ et calcule sa dimension.
Pour te simplifier la vie, tu peux supposer que $n = 4$.
- Soit U le sous-espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures. Calcule sa dimension (pour $n = 4$ si tu veux). Donne une base explicite de U .
- Calcule la dimension de $U \cap W$ et trouve une base.
- Est-ce que $U + W = M_n(K)$?

Exercice 11

Démontre la proposition suivante :

Deux matrices de mêmes dimensions sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.

Indication. Tu peux montrer que toute matrice est équivalente à une matrice de la forme

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où la matrice formée des r premières lignes et r premières colonnes est la matrice I_r , les autres coefficients sont tous nuls. Pour ce faire, considère A comme la matrice d'une application linéaire et choisis astucieusement de bonnes bases !