

# Série 17

Pour le 27 janvier 2027

## Exercice 1

On considère le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $V = \mathbb{R}[x]^{\leq 1}$  des polynômes à coefficients réels de degré  $\leq 1$ . Montre que  $(1+x, 1-x)$  forme une base de  $V$  et utilise-la pour construire un isomorphisme  $\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

**Indication.** Définis d'abord l'image des vecteurs (ici ce sont des polynômes) de base, puis "étend par linéarité" pour définir  $\alpha(ax+b)$  pour tous  $a, b \in \mathbb{R}$ .

## Exercice 2

On considère l'application linéaire *trace*,  $\text{Tr} : M_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ , définie par

$$\text{Tr} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d.$$

- a) Choisis les bases canoniques de  $M_2(\mathbb{C})$  et de  $\mathbb{C}$  pour construire la matrice de la trace.
- b) Calcule  $\ker \text{Tr}$ .
- c) Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$  et  $\alpha : M_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_2(\mathbb{C})$  l'application définie par  $\alpha(X) = AX$ .  
Montre que  $\alpha$  est linéaire et calcule sa matrice (pour la base canonique).
- d) Soit  $\beta : M_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  la composition  $\text{Tr} \circ \alpha$ . Explique pourquoi cette application est linéaire et calcule sa matrice (pour les bases canoniques).
- e) Calcule le rang de  $\beta$  en fonction des coefficients  $a, b, c$  et  $d$  de la matrice  $A$ .

**Exercice 3**

Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'application linéaire définie par  $f(x; y; z) = (x + y + z; x - 2y)$ .

- a) Montre que  $g_1 = (1; 0; 0)$ ,  $g_2 = (0; 0; 1)$  et  $g_3 = (-2; 1; 1)$  forment une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$ .
- b) Montre que  $u_1 = (1; 1)$  et  $u_2 = (1; 0)$  forment une base  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{R}^2$ .
- c) Trouve la matrice de  $f$  par rapport aux bases canoniques de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbb{R}^2$ .
- d) Trouve la matrice de  $f$  par rapport aux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ .

**Exercice 4**

**Vrai ou faux ?** Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

- a) Le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$  est isomorphe à  $\mathbb{R}^2$ .
- b) Le  $\mathbb{F}_7$ -espace vectoriel  $M_2(\mathbb{F}_7)$  est isomorphe au  $\mathbb{F}_{11}$ -espace vectoriel  $\mathbb{F}_{11}[x]^{\leq 3}$ .
- c) Le produit  $AB$ , où  $A \in M_{n \times 1}(K)$  et  $B \in M_{1 \times n}(K)$  est une matrice  $n \times n$  dont le rang vaut *au plus* 1.
- d) Lorsque  $\alpha : V \rightarrow W$  et  $\beta : W \rightarrow U$  sont non-nulles, le rang de  $\beta \circ \alpha$  vaut *au moins* 1.
- e) La matrice de la dérivation  $D : \mathbb{R}[x]^{\leq 4} \rightarrow \mathbb{R}[x]^{\leq 4}$  est inversible (rappelons que  $D(p(x)) = p'(x)$ ).

**Exercice 5**

Soit  $\alpha : \mathbb{Q}^4 \rightarrow \mathbb{Q}^3$  l'application linéaire donnée par

$$\alpha(x; y; z; t) = (x + y + z + t; x + 2y - t; x - y + 3z + 5t).$$

a) Trouve la matrice  $A$  telle que  $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z + t \\ x + 2y - t \\ x - y + 3z + 5t \end{pmatrix}.$

b) Calcule  $\alpha(1; 2; 2; -1)$ ,  $\alpha^{-1}(1; 3; -3)$  et  $\alpha^{-1}(0; 0; 0)$ .

c) Calcule l'image par  $\alpha$  du sous-espace  $\langle (1; 2; 2; -1), (1; 1; 0; 0) \rangle$ .

**Exercice 6**

Soient  $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  et  $\beta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  les applications linéaires données par  $\alpha(x; y) = (2x+y; x-y; 3x)$  et  $\beta(a; b; c) = (a+b-c; b+2c)$ . On utilise les bases canoniques de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ .

- a) Calcule les matrices  $A$  de  $\alpha$  et  $B$  de  $\beta$ .
- b) Calcule la matrice de  $\beta \circ \alpha$ .
- c) Calcule le rang de  $\beta \circ \alpha$ .

**Exercice 7**

Soient  $\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  et  $\beta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  les applications linéaires données par

$$\alpha(x; y; z) = (2x + y + z; y - z) \text{ et } \beta(a; b) = (a + b; a - b; b).$$

On utilise les bases canoniques de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ .

- a) Calcule les matrices  $A$  de  $\alpha$  et  $B$  de  $\beta$ .
- b) Calcule la matrice de  $\beta \circ \alpha$ .
- c) Calcule le rang de  $\beta \circ \alpha$ .

**Exercice 8**

Les matrices suivantes sont-elles inversibles? Attention, on ne demande pas de calculer l'inverse s'il existe, mais seulement d'expliquer pourquoi telle matrice est ou n'est pas inversible!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Indication.** Tu pourras considérer ces matrices comme étant celles d'applications linéaires et travailler avec les vecteurs colonnes de ces matrices.

**Exercices théoriques****Exercice 9**

Soit  $V$  un  $K$ -espace vectoriel et  $\alpha : V \rightarrow V$  un isomorphisme (linéaire). Montre que l'application réciproque  $\alpha^{-1} : V \rightarrow V$  est  $K$ -linéaire. Est-ce un isomorphisme?

**Exercice 10**

**Opérations élémentaires.** On travaille avec des matrices  $A$ ,  $E_{ij}(\lambda)$ ,  $P_{ij}$  et  $D_i(\mu)$  de  $M_n(K)$ .

- a) Montre que  $E_{ij}(\lambda)E_{ij}(\mu) = E_{ij}(\lambda + \mu)$  et calcule l'inverse de la matrice  $E_{ij}(1)$ .
- b) Calcule  $E_{ij}(\lambda)E_{jk}(1)E_{ij}(-\lambda)E_{jk}(-1)$ .
- c) Décris la matrice  $AE_{ij}(\lambda)$ .
- d) Décris la matrice  $AD_i(\mu)$ .
- e) Décris la matrice  $AP_{ij}$ .

**Exercice 11**

Soient  $A, B \in M_n(K)$ . Montre que  $BA$  est une matrice inversible si et seulement si  $A$  et  $B$  sont inversibles.

**Une piste possible.** Si  $BA$  est inversible, considérer les applications linéaires  $\alpha : K^n \rightarrow K^n$  et  $\beta : K^n \rightarrow K^n$  dont  $A$  et  $B$  sont les matrices, respectivement. Le but est de montrer que  $\alpha$  et  $\beta$  sont des isomorphismes. On peut le faire par exemple en calculant le noyau de  $\alpha$  et l'image de  $\beta$ .