

Série 15

Pour le 23 décembre 2026

Exercice 1

Détermine dans chacun des cas suivants si l'ensemble V considéré est un K -espace vectoriel.

- a) $V = M_2(\mathbb{R})$ et $K = \mathbb{R}$;
- b) V est le cercle de rayon 1 dans le plan complexe $\mathbb{C}$ et $K = \mathbb{C}$;
- c) $V = \mathbb{C}$ et $K = \mathbb{C}$;
- d) $V = \mathbb{C}$ et $K = \mathbb{R}$;
- e) $V = \mathbb{F}_p[x]$ l'ensemble des polynômes $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ avec les coefficients $a_i \in K = \mathbb{F}_p$;
- f) V est l'ensemble de toutes les fonctions réelles $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $f'(0) = 1$ et $K = \mathbb{R}$;
- g) V est l'ensemble de toutes les suites convergentes de nombres réels et $K = \mathbb{R}$.

Exercice 2

Soient $V_1, \dots, V_n$ des K -espaces vectoriels. Construis une structure de K -espace vectoriel sur le produit $V_1 \times \dots \times V_n$. Lorsque $n = 3$ et $V_1 = V_2 = V_3 = \mathbb{F}_2$, dessine l'espace vectoriel produit $V_1 \times V_2 \times V_3$.

Exercice 3

Détermine dans chacun des cas suivants si W est un sous-espace de V .

- a) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et W est l'ensemble de toutes les fonctions dérivables en tout point.
- b) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et W est l'ensemble de toutes les fonctions f telles que $f(\pi) = e$.
- c) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et W est l'ensemble de toutes les fonctions f bornées (il existe une constante c telle que $|f(x)| < c$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).
- d) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$ et W est le sous-ensemble de tous les triples (x, y, z) tels que $x + 2y + ez = 0$.

e) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$ et W est le sous-ensemble de tous les triples (x, y, z) tels que $xyz = 0$.

Exercice 4

On considère $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Décris l'action de $\mathbb{R}$ sur les nombres complexes. Montre que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ est un sous-espace vectoriel et trouve une base du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Exercice 5

Vrai ou faux ? Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

- a) Tous les espaces vectoriels sont de dimension finie.
- b) Tous les espaces vectoriels réels ont un nombre infini d'éléments.
- c) Un système de générateurs fini contient toujours une base.
- d) Deux vecteurs x et y sont linéairement dépendants si et seulement si x est un multiple de y .
- e) Trois vecteurs x , y et z de $\mathbb{R}^3$ sont linéairement dépendants si et seulement ils engendrent un plan $W = \langle x, y, z \rangle$.

Exercice 6

On travaille dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions réelles continues. On définit $f_k(x) = \cos^k(x)$ et $g_k(x) = \cos(kx)$.

- a) Montre que les fonctions $f_0, \dots, f_n$ sont linéairement indépendantes.

Indication. Si $\lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_n f_n = 0$, réfléchis aux propriétés du polynôme $\lambda_0 + \lambda_1 x + \dots + \lambda_n x^n$.

- b) Montre que les fonctions $g_0, \dots, g_n$ sont linéairement indépendantes.

Indication. Le faire par récurrence. Si on a la combinaison linéaire $\lambda_0 g_0 + \dots + \lambda_n g_n = 0$, on peut dériver l'équation plusieurs fois, puis additionner les équations d'une manière astucieuse pour pouvoir utiliser le pas de récurrence.

Exercice 7

On travaille dans le $\mathbb{F}_7$ -espace vectoriel $M_2(\mathbb{F}_7)$ des matrices carrées deux fois deux à coefficients dans le corps à sept éléments. On considère les sous-ensembles U des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, V des matrices de la forme $\begin{pmatrix} u & v \\ 0 & u \end{pmatrix}$ et W des matrices de la forme $\begin{pmatrix} u & 0 \\ w & u \end{pmatrix}$.

- a) Montre que U, V et W sont des sous-espaces de $M_2(\mathbb{F}_7)$.
- b) Trouve une base de chacun des trois sous-espaces.
- c) Détermine les sous-espaces $U \cap V$, $U \cap W$ et $V \cap W$, ainsi qu'une base de chacun d'eux.

Exercice 8

Soient $U \subset V$ un sous-espace vectoriel. Détermine $U + U$.

Exercice 9

On considère dans $\mathbb{Q}^5$ le sous-espace des éléments $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Q}^5$ tels que $x_1 = 3x_2$ et $x_3 = 7x_4$. Trouve une base de ce sous-espace.

Exercices théoriques**Exercice 10**

Multiples dans les K -espaces vectoriels. Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $\lambda \in K$. On définit $n\lambda$ par récurrence. Pour $n = 0$, $0 \cdot \lambda = 0_K$. Puis $1 \cdot \lambda = \lambda$ et pour $n > 1$, $n\lambda = (n - 1)\lambda + \lambda$. Enfin, si $n < 0$, alors $n\lambda = (-n)\lambda$. Soit V un K -espace vectoriel.

- a) Définis soigneusement les multiples nv d'un élément $v \in V$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$;
- b) Montre que $(n\lambda)v = n(\lambda v)$ pour tout $v \in V$;
- c) Montre que $\lambda(nv) = n(\lambda v)$ pour tout $v \in V$;
- d) Quand est-ce que $nv = 0_V$? Pense au cas des corps $\mathbb{F}_p$ et à la caractéristique du corps K .

Exercice 11

La somme directe. Soit V un K -espace vectoriel, U et W des sous-espaces tels que $U + W = V$.

- a) Montre que $U + W$ est une somme directe si et seulement si tout vecteur $x \in V$ s'écrit de manière *unique* $x = u + w$ avec $u \in U$ et $w \in W$.
- b) On considère dans $V = \mathbb{R}^3$ les sous-espaces $U_1 = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, $U_2 = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$, $U_3 = \{(0, y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$. Montre que $U_1 + U_2 + U_3 = V$ et que $U_i \cap U_j = \{(0, 0, 0)\}$ si $i \neq j$.
- c) Penses-tu que dans la partie précédente il s'agit d'une somme *directe* de trois sous-espaces vectoriels ?

Exercice 12

La somme directe, partie 2. Soit V un K -espace vectoriel, $U_1, \dots, U_n$ des sous-espaces tels que $U_1 + \dots + U_n = V$. On dit que cette somme est directe si tout vecteur v de V s'écrit de manière unique $v = u_1 + \dots + u_n$ avec $u_i \in U_i$. On note alors $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_n$.

- a) Montre que $V = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$ si et seulement si $U_i \cap U_j = \{0_V\}$ si $i \neq j$ et de plus $(U_i + U_j) \cap U_k = \{0_V\}$ pour $i \neq j$ et $k \neq i, j$.
- b) Montre que $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ si et seulement si on peut écrire 0_V de manière unique comme combinaison linéaire $0_V = u_1 + \dots + u_n$ avec $u_i \in U_i$.
- c) Réponds maintenant à la dernière question de l'exercice précédent.