
Corrigé Test 3 - Nb complexes, optimisation et structures algébriques 14.01.26

Problème 1. ($5 + 5 + 5 + 5 = 20$ points)

- a) Déterminer la représentation graphique du système $\begin{cases} |z - i| \leq 1 \\ z + \bar{z} \geq 0 \end{cases}$

La première inéquation donne un disque de centre i et de rayon 1.

Si $z = a + ib$, $z + \bar{z} \geq 0 \Leftrightarrow a + ib + a - ib = 2a \geq 0$, donc la partie réelle doit être positive.

On obtient donc la partie droite du demi-disque de centre i et de rayon 1, bord compris.

- b) Décrire l'image par la détermination principale du logarithme complexe du cercle de rayon $r > 0$ centré en l'origine et privé du point $-r$.

Considérons les points $re^{i\theta}$ où $r > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$. Par application du logarithme, on a

$$\ln |r| + i\theta.$$

En laissant θ parcourir $]-\pi, \pi[$, cet ensemble de point correspond à un « segment vertical » de longueur 2π ayant pour milieu le point $]\ln(r), 0[$.

- c) Caractériser géométriquement la similitude d'équation $f(z) = (1 + i)z + 1 - i$.

Comme $1 + i = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$, on a une homothétie de rapport $\sqrt{2}$ et une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$. De plus, on a une translation de vecteur $(1; -1)$.

Cherchons les points fixes de la transformation :

$$z = (1 + i)z + 1 - i \Leftrightarrow iz = i - 1 \Leftrightarrow z = \frac{i - 1}{i} = \frac{-1 - i}{-1} = 1 + i.$$

Ainsi, il s'agit de l'homothétie et de la rotation sont de centre $(1; 1)$.

- d) Ecrire l'équation dans $\mathbb{C}$ de la symétrie d'axe d'équation $x + y - 2 = 0$.

L'axe a pour équation $y = -x + 2$, donc $\theta = -\frac{\pi}{4}$ et on peut prendre pour point fixe $c = 2i$.

De plus, $e^{2i\theta} = \cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2}) = 0 - i = -i$.

cc On a alors $z' = -i(z - 2i) + 2i = -i\bar{z} - 2i^2 + 2i = -i\bar{z} + 4i$

Problème 2. ($4 + 6 = 10$ points)

- a) Soit $E = \mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties $A \subset X$ que l'on munit de l'intersection.

Montrer qu'il s'agit d'une loi de composition associative et donner son élément neutre.

Est-ce que $\mathcal{P}(X)$ muni de l'intersection forme un groupe ? Justifier la réponse.

Si $A, B \subset X$, alors $A \cap B \subset X$ aussi. Donc l'intersection donne une loi de composition, qui est clairement associative.

L'élément neutre est X , comme $A \cap X = A$ pour tout $A \subset X$.

Comme X est le seul ensemble qui admet un inverse par rapport à cette loi de composition, $\mathcal{P}(X)$ ne forme pas un groupe.

- b) Soit $(G, *)$ un groupe. Montrer qu'un sous-ensemble non-vidé $H \subset G$ est un sous-groupe si et seulement si $x * y$ et y^{-1} appartiennent à H pour tous $x, y \in H$.

Si H est un sous-groupe de G , la condition est vraie car $*$ est une loi de composition sur H pour laquelle tout élément de H admet un inverse (dans H).

Supposons maintenant que la condition est vérifiée. Alors $*$ est une loi de composition sur H (pour $x, y \in H$, on a bien que le produit $x * y$ est dans H). Elle est associative car $*$ l'est dans G . Comme H est non-vide, on peut choisir un élément $x \in H$. Son inverse x^{-1} est aussi dans H et donc le produit $x * x^{-1}$ de même. Ceci montre que l'élément neutre e de G se trouve dans H . Tous les éléments de H sont inversibles dans G et par hypothèse l'inverse se trouve dans H . Par conséquent, H est un sous-groupe.

Problème 3. ($6 + 2 + 4 + 2 = 14$ points)

- a) Donner la définition d'un anneau $(A, +, \cdot)$ puis la définition d'un corps K .

Un *anneau* est un ensemble A muni de deux lois de compositions, notées $+$ et $\cdot$, telles que :

- (a) $(A, +)$ est un groupe abélien ;
- (b) la multiplication est associative et possède un élément neutre, noté 1_A ou 1 ;
- (c) la multiplication est distributive par rapport à l'addition : $x(y + z) = xy + xz$ et $(x + y)z = xz + yz$, pour tous $x, y, z \in A$.

Un corps K est un anneau commutatif dans lequel $1 \neq 0$ et tout élément non nul est inversible.

- b) Est-ce que $M_2(\mathbb{R})$ forme un corps ? Justifier la réponse.

Non, ce n'en est pas un. On le voit par exemple car la multiplication n'est pas commutative, donc ce n'est pas un anneau commutatif. On le voit aussi car dans un corps, il n'y a pas de diviseur de zéro (par la proposition 2.3 de II. Les corps). Or, dans $M_2(\mathbb{R})$, il existe des diviseurs de zéro, par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- c) Montrer que l'ensemble $B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ est un sous-anneau de $M_2(\mathbb{R})$.

On voit facilement que la somme et l'opposé de matrices de cette forme sont encore dans B et que la matrice unité est aussi dans B . Il reste donc à vérifier que le produit de deux matrices de B est dans B :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by & ay + bx \\ -ay - bx & ax - by \end{pmatrix}.$$

- d) Est-ce que le sous-anneau B de $M_2(\mathbb{R})$ forme un corps ? Justifier la réponse.

Le sous-anneau B est un corps comme chaque élément non-nul a un inverse dans B :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Problème 4. ($2 + 3 + 3 = 8$ points)

Déterminer dans chacun des cas suivants si W est un sous-espace vectoriel de V . Justifier vos réponses en vérifiant les propriétés ou en donnant un contre-exemple.

- a) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $W = \{f \in V \mid f \text{ croissante}\}$;

Non : par exemple si f est croissante, alors $-f$ est décroissante.

- b) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $W = \{f \in V \mid f(0) = 0\}$;

Oui : la fonction nulle est dans W , si $f, g \in W$, alors $f + g \in W$ car $(f + g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0$ et si $f \in W$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f \in W$ car $(\lambda f)(0) = \lambda f(0) = \lambda \cdot 0 = 0$.

c) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}[x]$ et $W = \{p \in V \mid p(0) \cdot p(1) = 0\}$.

Non : Si on choisit $p(x) = x - 1$ et $q(x) = x$, alors $p, q \in W$ mais $(p + q)(x) = 2x - 1 \notin W$ car $(p + q)(0) \cdot (p + q)(1) = (-1) \cdot 1 = -1 \neq 0$.

Problème 5. (1 + 4 + 4 + 2 = 11 points)

On teste un antibiotique sur une colonie de bactéries.

La fonction N ci-dessous exprime le nombre de bactéries de la colonie en fonction du nombre de jours x écoulés depuis le début de l'expérience.

$$N(x) = 100'000 \cdot \frac{e^{0,02x}}{x+1} \quad \text{avec } x \geq 0.$$

a) Combien y a-t-il de bactéries au commencement de l'expérience ?

Il y a $N(0) = 100'000 \cdot \frac{e^0}{0+1} = 100'000 \cdot \frac{1}{1} = 100'000$ bactéries au début de l'expérience.

b) Montrer que la dérivée de la fonction N est donnée par $N'(x) = 2'000 \cdot \frac{(x-49) \cdot e^{0,02x}}{(x+1)^2}$.

$$\begin{aligned} N'(x) &= 100'000 \cdot \frac{0,02 \cdot e^{0,02x} \cdot (x+1) - e^{0,02x} \cdot 1}{(x+1)^2} = 100'000 \cdot \frac{e^{0,02x} \cdot (0,02x + 0,02 - 1)}{(x+1)^2} \\ &= 100'000 \cdot \frac{e^{0,02x} \cdot (0,02x - 0,98)}{(x+1)^2} = 100'000 \cdot \frac{0,02(x-49) \cdot e^{0,02x}}{(x+1)^2} \\ &= 2'000 \cdot \frac{(x-49) \cdot e^{0,02x}}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

c) Après combien de jours le nombre de bactéries sera-t-il minimal et combien y aura-t-il de bactéries à ce moment ? Justifier la réponse.

$e^{0,02x} > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ et $(x+1)^2 > 0$ car $x \geq 0$. Ainsi, $N'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-49) = 0 \Leftrightarrow x = 49$.

x	$-\infty$	0	49	$+\infty$
$x - 49$			- 0 +	
$2'000 \cdot e^{0,02x}$			+	+
$(x+1)^2$			+	+
signe de $N'(x)$			- 0 +	
Croissance de $N(x)$			$\searrow$ Min $\nearrow$	

Le nombre de bactéries est minimal après 49 jours.

Il y a alors $N(49) = 100'000 \cdot \frac{e^{0,02 \cdot 49}}{49+1} = 100'000 \cdot \frac{e^{0,98}}{50} \cong 5'329$ bactéries.

On peut aussi s'amuser à calculer la dérivée seconde $N''(x)$ et constater que $N''(49) > 0$.

d) Déterminer le nombre de bactéries lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Que peut-on conclure sur l'efficacité de ce médicament ?

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{100'000 \cdot e^{0,02x}}{x+1} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2'000 \cdot e^{0,02x}}{1} = \frac{+\infty}{1} = +\infty$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, le nombre de bactéries tend vers $+\infty$.

Ainsi, malgré l'antibiotique, la colonie de bactéries va croître à l'infini dans le temps.