

Corrigé Test 4 - Algèbre linéaire.

4 mars 2026

Exercice 1. ($3 + 3 + 2 = 8$ points)

On définit l'application *trace* $\text{Tr} : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\text{Tr} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d.$$

a) Montrer que la trace est une application linéaire.

$$\text{Tr} \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right] = \text{Tr} \begin{pmatrix} a + \lambda a' & b + \lambda b' \\ c + \lambda c' & d + \lambda d' \end{pmatrix} = a + \lambda a' + d + \lambda d'$$

et

$$\text{Tr} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \lambda \text{Tr} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = (a + d) + \lambda(a' + d') = a + d + \lambda a' + \lambda d'.$$

Ainsi, Tr est linéaire.

b) Déterminer une base du noyau et donner sa dimension.

$$\text{Tr} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a + d = 0 \Leftrightarrow a = -d. \quad \text{Une base de } \ker(\text{Tr}) \text{ est par exemple}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sa dimension est donc égale à 3.

c) Déterminer le rang de la trace.

Par le théorème du rang, on sait que $\dim V = \dim \ker \text{Tr} + \text{rang } \text{Tr}$.

Comme $\dim V = 4$ et $\dim \ker \text{Tr} = 3$, il vient $\text{rang } \text{Tr} = 1$.

Exercice 2. ($2 + 3 + 2 + 3 = 10$ points)

a) Donner la définition de deux matrices semblables.

Deux matrices $A, B \in M_n(K)$ sont semblables s'il existe une matrice inversible $S \in GL_n(K)$ telle que $A = SBS^{-1}$.

b) Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ et I_n sont semblables, alors $A = I_n$.

Comme A et I_n sont semblables, il existe une matrice S inversible telle que $A = SI_nS^{-1}$.
On a donc $A = SI_nS^{-1} = SS^{-1} = I_n$.

c) Énoncer le théorème du rang.

Soit $\alpha : V \rightarrow W$ une application linéaire telle que V soit de dimension finie. Alors

$$\dim V = \dim \ker \alpha + \text{rang } \alpha.$$

- d) Soit V un espace vectoriel de dimension finie n . Montrer que toute famille de n vecteurs linéairement indépendants forme une base de V .

Indication : Montrer cette affirmation par l'absurde.

Soit $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ une famille de n vecteurs linéairement indépendants de V .

Supposons par l'absurde que B ne forme pas une base de V . Alors il existe un $v \in V$ non nul qui n'est pas une combinaison linéaire d'éléments de B , c'est-à-dire,

$$v \neq a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

pour toute suite $a_1, \dots, a_n$ d'éléments de K . Ainsi, la famille $\{v, v_1, \dots, v_n\}$ est formée de $n + 1$ vecteurs linéairement indépendants de V , ce qui contredit le fait que $\dim V = n$.

Exercice 3. ($2 + 3 + 3 = 8$ points)

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par

$$f(x; y; z) = (x + y; y - z).$$

Soient $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

- a) Déterminer la matrice de f par rapport aux bases canoniques $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

On obtient directement la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- b) Montrer que les vecteurs

$$v_1 = (1; 1; -1), \quad v_2 = (1; 0; 1) \text{ et } v_3 = (1; -2; 1)$$

forment une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.

Comme $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, il suffit de vérifier que la famille $\mathcal{B}'$ est linéairement indépendante ou qu'elle forme un système de générateurs. Montrons qu'elle est linéairement indépendante. Supposons donc que $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$ et montrons que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. On obtient un système

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - 2\gamma = 0 \\ -\alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \gamma = 0. \end{cases}$$

La famille est bien linéairement indépendante et forme donc une base.

- c) Déterminer la matrice de f par rapport aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}' = ((1; 1); (1; -1))$.

On calcule les images par f des vecteurs de base et on obtient

$$f(v_1) = (2; 2) = 2 \cdot (1; 1), \quad f(v_2) = (1; -1) = 1 \cdot (1; 1) \text{ et } f(v_3) = (-1; -3) = 2 \cdot (1; 1) + 1 \cdot (1; -1).$$

La matrice est donc

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. ($3 + 2 + 3 + 2 = 10$ points)

Discuter et résoudre le système en fonction de m :

$$\begin{cases} x + y + mz = m \\ x + my - z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

On utilise la matrice augmentée pour résoudre le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & m & m \\ 1 & m & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & m \\ 0 & m-1 & -m-1 & 1-m \\ 0 & 0 & -m-1 & 1-m \end{pmatrix}$$

On suppose que $m \neq 1$. On peut alors diviser la ligne 2 par $m-1$:

$$\xrightarrow{D_2(\frac{1}{m-1})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & m \\ 0 & 1 & \frac{-m-1}{m-1} & \frac{1-m}{m-1} \\ 0 & 0 & -m-1 & 1-m \end{pmatrix}$$

On suppose que $m \neq -1$. On peut alors diviser la ligne 3 par $-m-1$:

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{D_3(\frac{1}{-m-1})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & m \\ 0 & 1 & \frac{-m-1}{m-1} & \frac{1-m}{m-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{m-1}{m+1} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{m^2+1}{m-1} & m+1 \\ 0 & 1 & \frac{-m-1}{m-1} & \frac{1-m}{m-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{m-1}{m+1} \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{E_{23}((m+1)/(m-1))E_{13}(-(m^2+1)/(m-1))} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2m}{m+1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{m-1}{m+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, si $m \neq \pm 1$, on obtient $S = \left\{ \left(\frac{2m}{m+1}; 0; \frac{m-1}{m+1} \right) \right\}$.

Si $m = 1$, on obtient $x = 1 - y$ et $z = 0$, donc $S = \{(1 - t; t; 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Si $m = -1$, on obtient $S = \emptyset$.

Exercice 5. (3 + 4 + 2 + 3 = 12 points)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les valeurs propres de A .

Si λ est une valeur propre, le rang de $A - \lambda I$ n'est pas maximal, donc $\det(A - \lambda I) = 0$.

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (3-\lambda)(-1-\lambda)-5 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2+2\lambda+8 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-4)(\lambda+2) = 0$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = -2$.

b) Déterminer les espaces propres associés à chaque valeur propre.

$\lambda = 4$: On cherche $E_4 = \ker(A - 4I)$. On résout $(A - 4I)X = 0$, ce qui nous donne

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 5y = 0 \\ x - 5y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5y \Rightarrow E_4 = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$\lambda = -2$: On cherche $E_{-2} = \ker(A + 2I)$. On résout $(A + 2I)X = 0$, ce qui nous donne

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 5y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -x \Rightarrow E_{-2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

c) Déterminer une matrice P telle que $P^{-1}AP = D$ soit diagonale et donner la matrice D correspondante.

Les colonnes de la matrice P se compose de vecteur propres.

Une matrice possible est $P = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Dans ce cas, la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

d) Calculer la matrice inverse P^{-1} .

$$\det P = -6 \quad \text{d'où} \quad P^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. (3 points)

Démontrer qu'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^4$ ne peut pas être surjective.

Par le théorème du rang, on a $3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker(f) + \text{rang}(f)$. Ainsi, $\text{rang}(f) \leq 3$.

Pour que la fonction soit surjective, il faudrait que $\text{rang}(f) = \dim \mathbb{R}^4 = 4 > 3$.

Donc f ne peut pas être surjective.

Exercice 7. (4 points)

Démontrer que si $f : V \rightarrow V$ est une application linéaire telle que $f \circ f = id_V$, alors 1 et -1 sont les seules valeurs propres possibles.

Soit λ une valeur propre de f . Alors il existe $v \neq 0$ tel que $f(v) = \lambda v$.

Par linéarité de f , on a $f(f(v)) = f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda^2 v$. Or, $f(f(v)) = id_V(v) = v$.

Ainsi, on doit avoir $v = \lambda^2 v \Leftrightarrow v - \lambda^2 v = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda^2)v = 0$.

Comme $v \neq 0$, il faut que $1 - \lambda^2 = 0$ dont les solutions sont $\lambda = 1$ et $\lambda = -1$.