

Corrigé Test 5 - Intégration

29 avril 2026

Exercice 1. (5 points)

Soit $f : [1; 2] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

Pour une subdivision σ quelconque, calculer les valeurs de $s_\sigma(f)$ et $S_\sigma(f)$, puis déterminer $s(f)$ et $S(f)$. Compte tenu de ces résultats, f est-elle intégrable ou non ?

On choisit une subdivision quelconque $1 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = 2$.

Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ qui est continu, m_i le minimum et M_i le maximum de f sur $[x_{i-1}; x_i]$ valent respectivement 0 et 1. Ainsi,

$$\begin{aligned} s_\sigma(f) &= \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) = 0 \cdot (x_1 - x_0) + 0 \cdot (x_2 - x_1) + \dots + 0 \cdot (x_n - x_{n-1}) = 0 \\ S_\sigma(f) &= \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) = 1 \cdot (x_1 - x_0) + 1 \cdot (x_2 - x_1) + \dots + 1 \cdot (x_n - x_{n-1}) \\ &= x_n - x_0 = 2 - 1 = 1. \end{aligned}$$

Ainsi, $s(f) = 0$ et $S(f) = 1$ ce qui implique que f n'est pas intégrable.

Exercice 2. (4 points)

Démontrer le théorème fondamental du calcul intégral :

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et G une primitive de f sur $[a, b]$. Alors

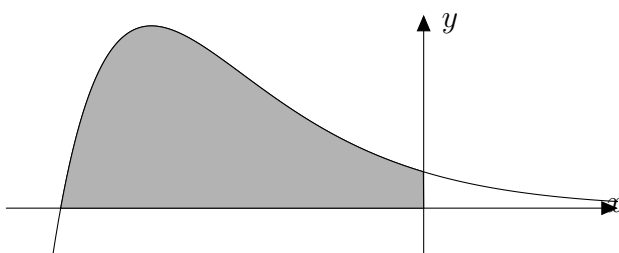
$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Si $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ et $G(x)$ sont deux primitives de $f(x)$, elles diffèrent d'une constante c . Ainsi,

$$G(b) - G(a) = (F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Exercice 3. (6 points)

La courbe associée à la fonction $u(x) = (x + 4)e^{-x}$ est représentée ci-dessous.



Calculer l'aire du domaine grisé fermé délimité par la courbe et les axes de coordonnées.

On remarque que le zéro de la fonction est en $x = -4$.

L'aire est donc égale à $A = \int_{-4}^0 (x+4)e^{-x} dx$. En posant $f'(x) = e^{-x}$ et $g(x) = x+4$, donc $f(x) = -e^{-x}$ et $g'(x) = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} A &= \int_{-4}^0 (x+4)e^{-x} dx = \left[-(x+4)e^{-x} \right]_{-4}^0 - \int_{-4}^0 -e^{-x} dx = \left[-(x+4)e^{-x} - e^{-x} \right]_{-4}^0 \\ &= -4 \cdot 1 - 1 - (0 - e^4) = e^4 - 5 \cong 49,598 \end{aligned}$$

Exercice 4. ($2 + 2 + 6 + 6 = 16$ points)

Déterminer les primitives des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \frac{2x^3 + 1}{x^2} = 2x + \frac{1}{x^2} \Rightarrow F(x) = x^2 - \frac{1}{x} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = (2x+1)e^{-2x^2-2x} \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x^2-2x} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = \frac{5x^2 + 6}{x^3 + 2x}$

Indication : utiliser des éléments simples.

On commence par décomposer en éléments simples la fraction :

$$\begin{aligned} \frac{5x^2 + 6}{x^3 + 2x} &= \frac{5x^2 + 6}{x(x^2 + 2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{x^2 + 2} = \frac{a(x^2 + 2) + (bx + c)x}{x(x^2 + 2)} = \frac{ax^2 + 2a + bx^2 + cx}{x(x^2 + 2)} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a + b &= 5 \\ c &= 0 \\ 2a &= 6 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a &= 3 \\ b &= 2 \\ c &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc $f(x) = \frac{5x^2 + 6}{x^3 + 2x} = \frac{3}{x} + \frac{2x}{x^2 + 2}$, dont les primitives sont données par

$$F(x) = 3 \ln(|x|) + \ln(|x^2 + 2|) + c = \ln(|x|^3(x^2 + 2)) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

d) $f(x) = \frac{x-4}{x^2 + 6x + 18}$

On a $\frac{x-4}{x^2 + 6x + 18} = \frac{x-4}{(x+3)^2 + 9}$

En posant $u = x+3$, on obtient $\frac{u-7}{u^2 + 9} = \frac{u}{u^2 + 9} - \frac{7}{u^2 + 9} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2u}{u^2 + 9} - \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{\left(\frac{u}{3}\right)^2 + 1},$

dont les primitives sont $\frac{1}{2} \ln(|u^2 + 9|) - \frac{7}{9} \cdot 3 \arctan\left(\frac{u}{3}\right)$. Ainsi,

$$F(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 6x + 18}) - \frac{7}{3} \arctan\left(\frac{x+3}{3}\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5. (5 + 5 + 6 = 16 points)

a) Calculer $\int_1^2 x \ln(2x) dx$ en intégrant par partie.

$$\begin{aligned}\int_1^2 x \ln(2x) dx &= \left[\ln(2x) \cdot \frac{1}{2}x^2 \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2}x^2 dx = \left[\ln(2x) \cdot \frac{1}{2}x^2 \right]_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 x dx \\ &= \left[\ln(2x) \cdot \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^2 \right]_1^2 = \frac{1}{2} \ln(2^2) \cdot 4 - \frac{1}{4} \cdot 4 - \left(\frac{1}{2} \ln(2) \cdot 1 - \frac{1}{4} \right) \\ &= 4 \ln(2) - \frac{1}{2} \ln(2) - 1 + \frac{1}{4} = \frac{7}{2} \ln(2) - \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

b) Calculer $\int_{-3/2}^{-1} x \sqrt{2x+3} dx$ en appliquant un changement de variable.

On pose $t = \sqrt{2x+3}$, donc $\varphi(t) = x = \frac{t^2-3}{2}$ et $\varphi'(t) = \frac{2t}{2} = t$.

De plus, si $x \in \left[-\frac{3}{2}; -1\right]$, alors $t \in [0; 1]$. On a donc

$$\int_{-3/2}^{-1} x \sqrt{2x+3} dx = \int_0^1 \frac{t^2-3}{2} \cdot t \cdot t dt = \int_0^1 \frac{t^4}{2} - \frac{3t^2}{2} dt = \left[\frac{t^5}{10} - \frac{t^3}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{10} - \frac{1}{2} - 0 = -\frac{2}{5}.$$

c) Calculer $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^3(x)}{\sin^4(x)} dx$ en appliquant le changement de variables $t = \sin(x)$.

On pose $t = \sin(x)$, donc $dt = \cos(x)dx$. De plus, si $x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$, alors $t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

En utilisant que $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$, il vient

$$\begin{aligned}\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^3(x)}{\sin^4(x)} dx &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1 - \sin^2(x)}{\sin^4(x)} \cdot \cos(x) dx = \int_{1/2}^1 \frac{1-t^2}{t^4} dt = \int_{1/2}^1 \left(\frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^2} \right) dt \\ &= \left[-\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} \right]_{1/2}^1 = -\frac{1}{3} + 1 - \left(-\frac{8}{3} + 2 \right) = -1 + \frac{7}{3} = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

Exercice 6. ($3 + 3 = 6$ points)

Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ou divergentes ?

a) $\int_2^{10} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} dx$

On fait le changement de variables $t = x - 2$, donc $x = \varphi(t) = t + 2$ et $\varphi'(t) = 1$

Si $x \in [2; 10]$, alors $t \in [0; 8]$. On a donc

$$\int_2^{10} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} dx = \int_0^8 \frac{1}{t^{2/3}} dt$$

Par un critère de convergence, comme $\alpha = \frac{2}{3} < 1$, l'intégrale généralisée converge.

Remarque : On aurait pu faire directement le calcul, qui donne $[3t^{1/3}]_0^8 = 6$.

b) $\int_1^{+\infty} \frac{2x^3 - 1}{x^3 + 1} dx$

On remarque que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 1}{x^3 + 1} = 2 \neq 0$.

Ainsi, par un critère de convergence on sait que cette intégrale généralisée diverge.

Remarque : on peut aussi faire le calcul de la primitive et vérifier qu'elle diverge, mais c'est plus long !

On commence par faire une division euclidienne, puis une décomposition en éléments simples :

$$f(x) = \frac{2x^3 - 1}{x^3 + 1} = 2 - \frac{3}{x^3 + 1} = 2 - \frac{1}{x + 1} + \frac{x - 2}{x^2 - x + 1}$$

Les primitives sont alors

$$F(x) = 2x - \ln(|x + 1|) + \frac{1}{2} \ln(x^2 - x + 1) + \sqrt{3} \arctan \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Les détails du calcul pour la primitive de $\frac{1}{x^3 + 1}$ sont faits dans l'exercice 1c) de la série 24.