

Examen 2026 : Solutions questions ouvertes

Les points ne sont attribués que si les arguments sont complets. Aucun demi-point n'est accordé. Un point est retiré pour chaque affirmation erronée (un point au maximum par sous-question). Il n'y a pas de points négatifs par sous-question dans la partie ouverte.

La distribution des points est provisoire !

1. Le but de cet exercice est de montrer l'inégalité d'Hadamard, c'est-à-dire

$$|\det(A)| \leq \prod_{i=1}^n \|a_i\|_2,$$

pour $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dont les colonnes sont a_1, \dots, a_n .

Soit A' la matrice dont les colonnes sont a_1^*, \dots, a_n^* , les vecteurs *non-normalisés* issus de l'orthogonalisation de Gram-Schmidt sur les colonnes de A . On rappelle la décomposition $A = A'S$, où S est triangulaire supérieure de diagonale 1.

- (a) Montrer que $\det(S) = 1$ et que $\det(A) = \det(A') = \pm \prod_{i=1}^n \|a_i^*\|_2$.
 (b) Montrer que $\|a_i^*\| \leq \|a_i\| \forall i = 1, \dots, n$, et conclure.
 (c) Supposons de surcroît que les coefficients de A soient tous bornés absolument par $M \in \mathbb{R}_+$: $|A_{ij}| \leq M \forall i, j$. Dédurre de l'inégalité d'Hadamard que $|\det(A)| \leq M^n n^{n/2}$.

Solution :

- (a) Comme S est une matrice triangulaire supérieure à diagonale unité, on obtient $\det(S) = 1$ et donc

$$\det(A) = \det(A'S) = \det(A').$$

(+ 1 point)

On remarque que

$$A'^T A' = \text{diag}(\|a_1^*\|_2^2, \dots, \|a_n^*\|_2^2)$$

et, par conséquent,

$$\det(A')^2 = \det(A'^T) \det(A') = \prod_{i=1}^n \|a_i^*\|_2^2,$$

ce qui implique que

$$\det(A') = \pm \prod_{i=1}^n \|a_i^*\|_2.$$

(+ 1 point)

- (b) On a

$$\begin{aligned} \|a_i\|_2^2 &= \|a_i - a_i^* + a_i^*\|_2^2 \\ &= \|a_i - a_i^*\|_2^2 + \|a_i^*\|_2^2 \\ &\geq \|a_i^*\|_2^2, \end{aligned}$$

où l'on utilise le fait que $(a_i - a_i^*) \perp a_i^*$ ainsi que le théorème de Pythagore généralisé.

(+ 1 point)

D'après la partie a), on obtient

$$|\det(A)| \leq \prod_{i=1}^n \|a_i\|_2.$$

(+ 1 point)

- (c) Comme $|A_{ij}| \leq M$ pour tous i, j , on observe que $\|a_i\|_2 \leq M\sqrt{n}$, ce qui implique que

$$|\det(A)| \leq M^n n^{n/2}.$$

(+ 1 point)

2. Soient $n \geq 1$, $m \geq n$, et $0 < \varepsilon \leq 1$. Soient

$$v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$$

des vecteurs unitaires, c'est-à-dire

$$\|v_i\|_2 = 1 \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, m,$$

où $\|\cdot\|_2$ dénote la norme associée au produit scalaire standard. On suppose que la première coordonnée de chaque vecteur est bornée en valeur absolue par ε , c'est-à-dire

$$|(v_i)_1| \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, m.$$

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la matrice dont les lignes sont les vecteurs v_1, \dots, v_m , c'est-à-dire

$$A = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_m^T \end{pmatrix}.$$

On note

$$\sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq \dots \geq \sigma_n(A)$$

les valeurs singulières de A .

Montrer que

$$\sigma_n(A)^2 \leq m\varepsilon^2.$$

Solution :

Soient $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \in \mathbb{R}$ les valeurs propres de $A^T A \in \mathbb{R}^n$. À montrer :

$$\lambda_n \leq m\varepsilon^2.$$

(+ 1 point)

D'après les propriétés du quotient de Rayleigh, on a

$$\lambda_n = \min_{\|x\|_2=1} x^T A^T A x = \min_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2^2.$$

(+ 1 point)

Puisque $\|e_1\|_2 = 1$, ce minimum est nécessairement majoré par la valeur obtenue en $x = e_1$:

$$\lambda_n \leq \|Ae_1\|_2^2.$$

(+ 1 point)

$$Ae_1 = \begin{pmatrix} (v_1)_1 \\ (v_2)_1 \\ \vdots \\ (v_m)_1 \end{pmatrix}.$$

Parce que $|(v_i)_1| \leq \varepsilon$ pour tout $i = 1, \dots, m$, on majore la norme au carré de ce vecteur :

$$\|Ae_1\|_2^2 = \sum_{i=1}^m (v_i)_1^2 \leq \sum_{i=1}^m \varepsilon^2 = m\varepsilon^2.$$

(+ 1 point)

3. Soit K un corps.

i) Soient A, B, C des matrices carrées sur K , de tailles compatibles. Montrer que

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \implies B \sim C.$$

Indication : Montrer d'abord que B et C ont le même polynôme minimal en évaluant le polynôme minimal de B sur les deux matrices par blocs. Puis utiliser le même argument récursivement, ou raisonner à l'aide de la forme normale de Frobenius.

ii) Soient

$$F = \text{diag}(C(f_1), \dots, C(f_r)), \quad G = \text{diag}(C(g_1), \dots, C(g_s))$$

deux matrices en forme normale de Frobenius, où les polynômes $f_i, g_j \in K[x]$ sont unitaires de degré strictement positif et vérifient

$$f_r \mid f_{r-1} \mid \dots \mid f_1, \quad g_s \mid g_{s-1} \mid \dots \mid g_1.$$

Montrer que

$$F \sim G \implies F = G.$$

Indication : On pourra utiliser les faits suivants :

- le polynôme minimal de la matrice compagnon $C(f)$ est f ;
- deux matrices semblables ont le même polynôme minimal.

Solution :

i) Posons

$$M_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \text{ et } M_2 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Supposons $M_1 \sim M_2$. Pour tout polynôme $P \in K[x]$, les matrices $P(M_1)$ et $P(M_2)$ sont semblables et ont donc le même rang. (+ 1 point)

Soit $m_B(x)$ le polynôme minimal de B . Évaluation sur M_1 et M_2 donne

$$m_B(M_1) = \begin{pmatrix} m_B(A) & 0 \\ 0 & m_B(B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_B(A) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$m_B(M_2) = \begin{pmatrix} m_B(A) & 0 \\ 0 & m_B(C) \end{pmatrix}.$$

L'égalité des rangs donne $\text{rang}(m_B(C)) = \text{rang}(0)$, et donc $m_B(C) = 0$. Le polynôme minimal m_C divise donc m_B .

Par symétrie, en évaluant m_C sur M_1 et M_2 , on trouve que m_B divise m_C . Les polynômes étant unitaires, on obtient $m_B = m_C$. (+ 1 point)

Soit $m(x) \in K[x]$ le polynôme minimal de B et C et $C(m)$ la matrice de compagnon de m . La théorie de la forme normale de Frobenius implique qu'il existent des matrices $B', C' \in K^{\ell \times \ell}$ de taille compatible t.q.

$$B \sim \text{diag}(C(m), B') \text{ et } C \sim \text{diag}(C(m), C')$$

et

$$\begin{pmatrix} A & & \\ & C(m) & \\ & & B' \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & & \\ & C(m) & \\ & & C' \end{pmatrix}$$

(+ 1 point)

Par récurrence $B' \sim C'$ et alors $B \sim C$. (+ 1 point)

Remarque : Le point correspondant à l'argument par récurrence n'est attribué que si l'étape précédente a été effectuée.

ii) Le polynôme minimal d'une matrice diagonale par blocs est le Plus Petit Commun Multiple (PPCM) des polynômes minimaux de ses blocs. Pour la matrice F , les polynômes minimaux des blocs sont f_1, \dots, f_r . La condition de divisibilité $f_r \mid \dots \mid f_1$ implique que le polynôme minimal de F est f_1 ,

De même, le polynôme minimal de G est g_1 . (+ 1 point)

Puisque $F \sim G$, elles ont le même polynôme minimal. On en déduit que $f_1 = g_1$. Par conséquent, $C(f_1) = C(g_1)$. Posons $A = C(f_1)$.

On peut alors réécrire F et G sous la forme :

$$F = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & F' \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & G' \end{pmatrix}$$

où F' et G' sont composées des blocs restants. Puisque $F \sim G$, on peut appliquer le résultat de la question i) pour en déduire que $F' \sim G'$. (+ 1 point)

En répétant ce même argument par récurrence sur le nombre de blocs, les polynômes minimaux de F' et G' sont f_2 et g_2 , ce qui donne $f_2 = g_2$, et ainsi de suite. On conclut donc que $F = G$. (+ 1 point)

4. Soit K un corps, et soit

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n \in K[x]$$

un polynôme unitaire. Soit

$$C(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'un vecteur non nul $v \in K^n$ est un vecteur propre de $C(p)^T$ si et seulement s'il existe $r \in K$ et $\beta \in K \setminus \{0\}$ tels que

$$p(r) = 0$$

et

$$v = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, r est la valeur propre correspondante.

Solution : Posons

$$w_r = \begin{pmatrix} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Alors

$$C(p)^T w_r = \begin{pmatrix} r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ -a_0 - a_1 r - \dots - a_{n-1} r^{n-1} \end{pmatrix}.$$

(+ 1 point)

Ainsi, $C(p)^T w_r = r w_r$ si et seulement si

$$-a_0 - a_1 r - \dots - a_{n-1} r^{n-1} = r^n,$$

ce qui est équivalent à $p(r) = 0$. Donc tout vecteur

$$\beta w_r, \quad \beta \neq 0,$$

avec $p(r) = 0$, est un vecteur propre de $C(p)^T$ associé à la valeur propre r .

(+ 1 point)

Réciproquement, soit $v = (v_1, \dots, v_n)^T \neq 0$ tel que

$$C(p)^T v = r v.$$

Les $n - 1$ premières lignes donnent

$$v_{i+1} = r v_i \quad i = 1, \dots, n - 1.$$

Donc

$$v_i = r^{i-1} v_1.$$

(+ 1 point)

Comme $v \neq 0$, on a $v_1 \neq 0$. En posant $\beta = v_1$, on obtient

$$v = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \end{pmatrix}.$$

La dernière ligne de $C(p)^T v = rv$ donne exactement

$$p(r) = 0.$$

(+ 1 point)