

Ens : Prof. Friedrich Eisenbrand
 Algèbre Linéaire Avancée II - MA
 22.06.2026
 210 minutes













I1-10

999999

Salle: **IM 9 9**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 20 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une calculatrice et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Première partie : Pour les questions avec une seule bonne réponse possible, on comptera:
 - +2 points si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Deuxième partie : Pour les questions vrai/faux, on comptera:
 - +1 points si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Troisième partie : pour les questions ouvertes, le nombre de point maximum est noté au-dessus de chaque question. Laissez les cases à cocher vides !
- Pour les questions ouvertes, utilisez la grille prévue à cet effet pour votre réponse. Chacune de ces grilles dispose d'une version de réserve dans la section correspondante. Nous ne prenons en compte qu'une seule grille. Si deux ont été utilisées, barrez celle qui n'est pas à évaluer. Toute affirmation erronée dans votre texte sera sanctionnée par un retrait d'un point.
- Utilisez un stylo à encre noire ou bleu foncé et effacez proprement avec du correcteur blanc si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes Observe this guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
     		

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la/les case(s) correspondante(s) à la/aux réponse(s) correcte(s) sans faire de ratures.

Question [SCQ-01] Soit $A \in \mathbb{C}^{7 \times 7}$ dont le polynôme caractéristique est $f_A(x) = -(x-2)^4(x-4)^3$ et le polynôme minimal est $m_A(x) = (x-2)^2(x-4)^2$. On sait de plus que le rang de la matrice $(A-2I)$ est égal à 5. Quelle est la forme normale de Jordan de la matrice A (à permutation des blocs près)?

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ & 2 & & & & & \\ & & 2 & 1 & & & \\ & & & 2 & & & \\ & & & & 4 & 1 & \\ & & & & & 4 & \\ & & & & & & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ & 2 & & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 2 & & & \\ & & & & 4 & 1 & \\ & & & & & 4 & \\ & & & & & & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ & 2 & & & & & \\ & & 2 & 1 & & & \\ & & & 2 & & & \\ & & & & 4 & 1 & \\ & & & & & 4 & 1 \\ & & & & & & 4 \end{pmatrix}$$

Aucune des autres réponses n'est correcte.

Question [SCQ-02] Soit $O \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice orthogonale. Laquelle des assertions suivantes est correcte?

$\|O\|_F = \sqrt{n}$.

$\|O\|_F = n$.

$\|O\|_F = 1$.

Aucune des réponses n'est correcte.

Question [SCQ-03] Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Laquelle des assertions suivantes est équivalente à l'assertion A est diagonalisable?

Le polynôme caractéristique de A est scindé (produit de facteurs de degré 1).

Le polynôme minimal de A possède uniquement des racines simples.

Pour chaque valeur propre λ de A , sa multiplicité algébrique est supérieure ou égale à sa multiplicité géométrique.

La matrice A est semblable à sa matrice transposée A^T .

Aucune des réponses n'est correcte.

CATALOG

Question [SCQ-04] Soient $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$ et $\text{rang}(B) = k$. Soient a_i^T, b_i^T , pour $1 \leq i \leq m$, les lignes de A et de B respectivement. Laquelle des assertions est fausse?

- Si $\|A - B\|_F \leq \|A - C\|_F$ pour tout $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\text{rang}(C) \leq k$, $\text{span}\{b_1, \dots, b_m\}$ est un meilleur sous-espace approximatif des points a_1, \dots, a_m .
- Si $\text{span}\{b_1, \dots, b_m\}$ est un meilleur sous-espace approximatif des points a_1, \dots, a_m , alors $\|A - B\|_F \leq \|A - C\|_F$ pour tout $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\text{rang}(C) \leq k$.
- Si $\|A - B\|_F \leq \|A - C\|_F$ pour tout $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\text{rang}(C) \leq k$, alors pour tout i , b_i est la projection de a_i dans $\text{span}\{b_1, \dots, b_m\}$.
- Toutes les autres réponses sont correctes.

Full points will be awarded to students which selected only the second option, only the fourth option, or the second and the fourth option.

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle n'est **pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question [TF-01] Soit K un corps, pas nécessairement \mathbb{C} . Une matrice $A \in K^{n \times n}$ est similaire à une matrice $J \in K^{n \times n}$ en forme normale de Jordan si et seulement si le polynôme caractéristique $f_A(x) \in K[x]$ se laisse factoriser en termes linéaires

$$f_A(x) = (-1)^n \prod_{i=1}^k (x - r_i)^{n_i}$$

avec $r_i \in K$.

VRAI FAUX

Question [TF-02] Soient K un corps et $f(x), g(x), h(x) \in K[x] \setminus \{0\}$ et supposons que $g(x)$ divise $f(x)$. Soient $r_1(x)$ et $r_2(x)$ les restes des divisions

$$f(x) = q_1(x)g(x)h(x) + r_1(x) \quad \text{et} \quad f(x)/g(x) = q_2(x)h(x) + r_2(x)$$

respectivement. Alors $r_1(x) = r_2(x)$.

VRAI FAUX

Question [TF-03] Soit $A \in K^{n \times n}$. Le polynôme minimal de A et celui de $A - I$ sont les mêmes.

VRAI FAUX

Question [TF-04] Soient

$$C_1 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} \in K^{n \times n} \quad \text{et} \quad C_2 = \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$$

deux matrices bloc-diagonales $A_1, A_2 \in K^{k \times k}$. Si C_1 et C_2 sont similaires, alors A_1 et A_2 sont similaires.

VRAI FAUX

Question [TF-05] Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique. La matrice A est définie positive si et seulement si tous les mineurs symétriques de A sont strictement positifs.

VRAI FAUX

Question [TF-06] Soient $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique et u_1, \dots, u_n une base de vecteurs propres de A , associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Supposons que $u_i^T u_j = 0$ lorsque $i \neq j$. Pour $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \in \mathbb{R}^n$, on a

$$x^T A x = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \lambda_i.$$

VRAI FAUX

Question [TF-07] Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ symétrique. Alors A est diagonalisable.

VRAI FAUX

CATALOG

Question [TF-08] Soient $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ des matrices nilpotentes. Alors la matrice $A + B$ est aussi nilpotente.

VRAI FAUX

Question [TF-09] Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ (avec $n \geq 3$) une matrice. Si le polynôme minimal de A est $m_A(x) = (x - \lambda)^{n-1} \in \mathbb{C}[x]$, alors la dimension de l'espace propre associé à λ est égale à 2.

VRAI FAUX

Question [TF-10] Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Alors A et A^T possèdent les mêmes valeurs singulières.

VRAI FAUX

Question [TF-11] Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Si la matrice A est nilpotente, alors la matrice $e^A - I_n$ est également nilpotente.

VRAI FAUX

Question [TF-12] Soit A la matrice ci-dessous. Soit v un vecteur propre associé à la valeur propre 4 et w un vecteur propre associé à -2 . Alors on a $v^*w = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1+i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & -i & -2 \\ 1 & i & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

VRAI FAUX

Troisième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 17: *Cette question est notée sur 5 points.*

<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	4	<input checked="" type="checkbox"/>	5
--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	-------------------------------------	---

Le but de cet exercice est de montrer l'*inégalité d'Hadamard*, c'est-à-dire

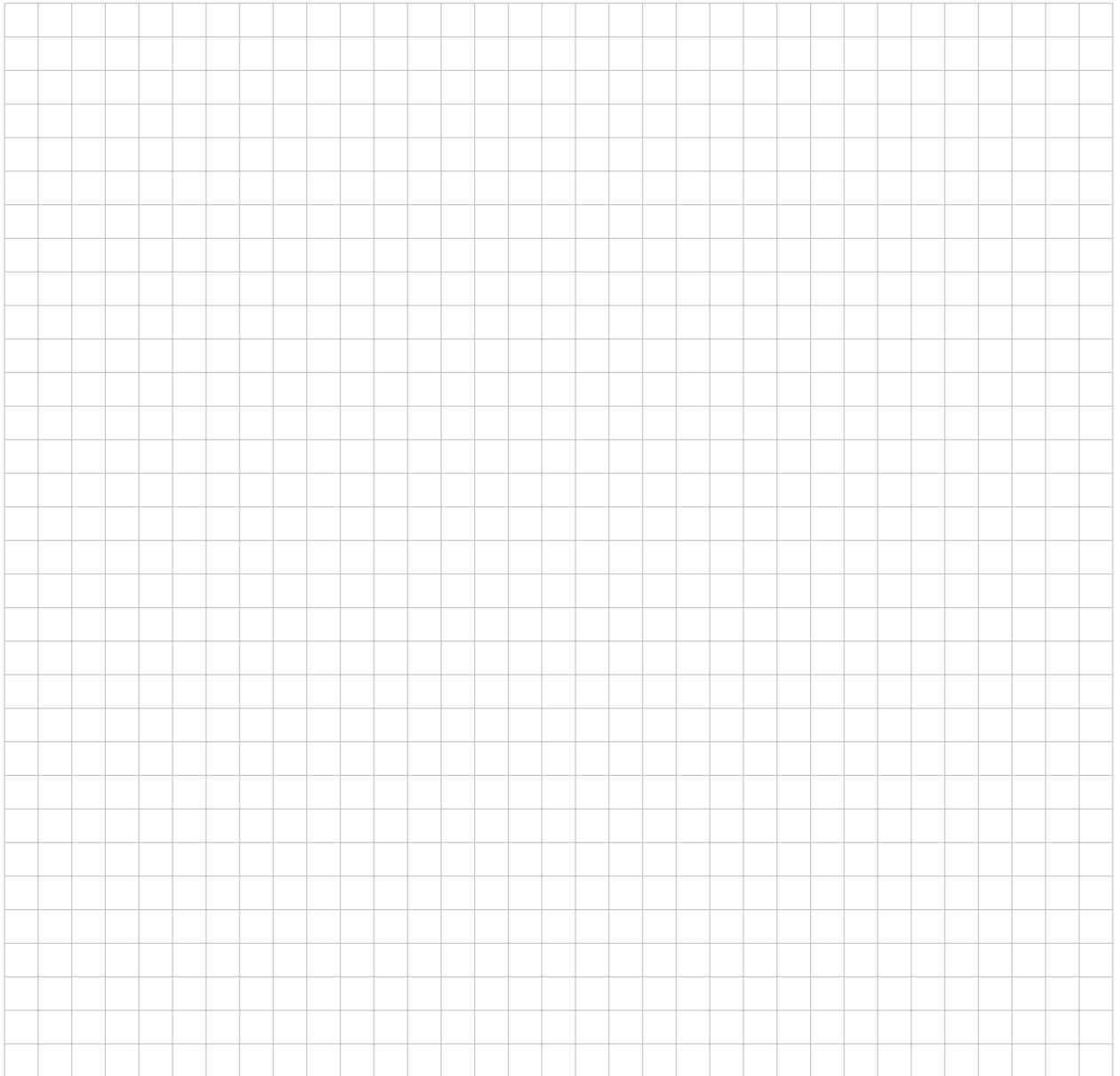
$$|\det(A)| \leq \prod_{i=1}^n \|a_i\|_2,$$

pour $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dont les colonnes sont a_1, \dots, a_n .

Soit A' la matrice dont les colonnes sont a_1^*, \dots, a_n^* , les vecteurs *non-normalisés* issus de l'orthogonalisation de Gram-Schmidt sur les colonnes de A . On rappelle la décomposition $A = A'S$, où S est triangulaire supérieure de diagonale 1.

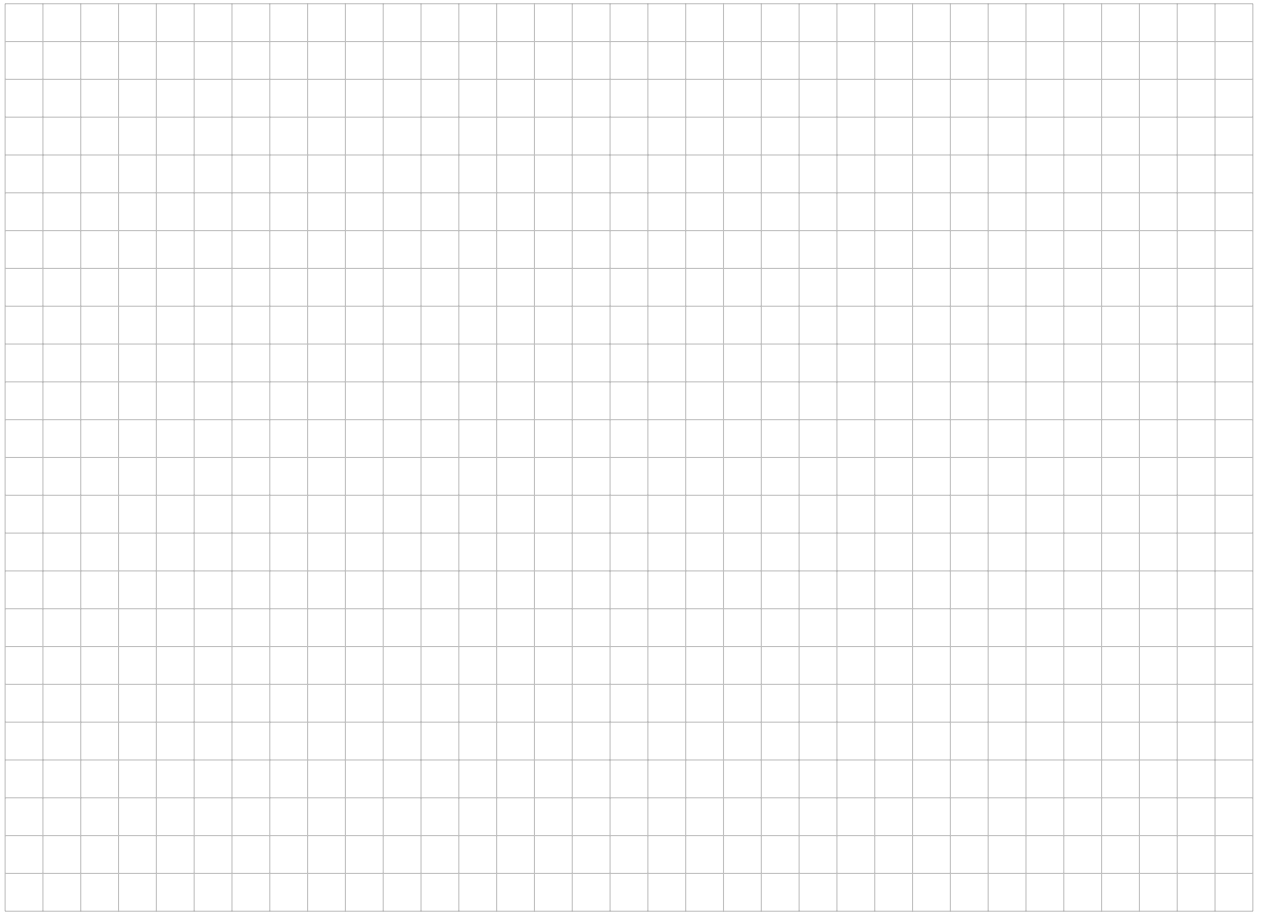
CATALOG

(a) Montrer que $\det(S) = 1$ et que $\det(A) = \det(A') = \pm \prod_{i=1}^n \|a_i^*\|_2$.



CATALOG

(b) Montrer que $\|a_i^*\| \leq \|a_i\| \forall i = 1, \dots, n$, et conclure.



(c) Supposons de surcroît que les coefficients de A soient tous bornés absolument par $M \in \mathbb{R}_+ : |A_{ij}| \leq M \forall i, j$. Dédurre de l'inégalité d'Hadamard que $|\det(A)| \leq M^n n^{n/2}$.



Question 18: Cette question est notée sur 4 points.

 0 1 2 3 4

Soient $n \geq 1$, $m \geq n$, et $0 < \varepsilon \leq 1$. Soient

$$v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$$

des vecteurs unitaires, c'est-à-dire

$$\|v_i\|_2 = 1 \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, m,$$

où $\|\cdot\|_2$ dénote la norme associée au produit scalaire standard. On suppose que la première coordonnée de chaque vecteur est bornée en valeur absolue par ε , c'est-à-dire

$$|(v_i)_1| \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, m.$$

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la matrice dont les lignes sont les vecteurs v_1, \dots, v_m , c'est-à-dire

$$A = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_m^T \end{pmatrix}.$$

On note

$$\sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq \dots \geq \sigma_n(A)$$

les valeurs singulières de A .

Montrer que

$$\sigma_n(A)^2 \leq m\varepsilon^2.$$

Question 19: Cette question est notée sur 7 points.

0
 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

Soit K un corps.

(a) Soient A, B, C des matrices carrées sur K , de tailles compatibles. Montrer que

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \implies B \sim C.$$

Indication : Montrer d'abord que B et C ont le même polynôme minimal en évaluant le polynôme minimal de B sur les deux matrices par blocs. Puis utiliser le même argument récursivement, ou raisonner à l'aide de la forme normale de Frobenius.

(b) Soient

$$F = \text{diag}(C(f_1), \dots, C(f_r)), \quad G = \text{diag}(C(g_1), \dots, C(g_s))$$

deux matrices en forme normale de Frobenius, où les polynômes $f_i, g_j \in K[x]$ sont unitaires de degré strictement positif et vérifient

$$f_r \mid f_{r-1} \mid \dots \mid f_1, \quad g_s \mid g_{s-1} \mid \dots \mid g_1.$$

Montrer que

$$F \sim G \quad \implies \quad F = G.$$

Indication : On pourra utiliser les faits suivants :

- le polynôme minimal de la matrice compagnon $C(f)$ est f ;
- deux matrices semblables ont le même polynôme minimal.



Question 20: Cette question est notée sur 4 points.

0 1 2 3 4

Soit K un corps, et soit

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n \in K[x]$$

un polynôme unitaire. Soit

$$C(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'un vecteur non nul $v \in K^n$ est un vecteur propre de $C(p)^T$ si et seulement s'il existe $r \in K$ et $\beta \in K \setminus \{0\}$ tels que

$$p(r) = 0$$

et

$$v = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \end{pmatrix},$$

et que, dans ce cas, r est la valeur propre correspondante.

