

Corrigé Test 6 - Géométrie

3 juin 2026

Exercice 1. ($3 + 3 = 6$ points)

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le parallélogramme $\mathcal{P}$ construit deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

a) Montrer que $(\vec{b} - \vec{a}) \wedge (\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{b} \wedge \vec{a}$;

$$(\vec{b} - \vec{a}) \wedge (\vec{a} + \vec{b}) = (\vec{b} - \vec{a}) \wedge \vec{a} + (\vec{b} - \vec{a}) \wedge \vec{b} = \vec{b} \wedge \vec{a} - \vec{a} \wedge \vec{a} + \vec{b} \wedge \vec{b} - \vec{a} \wedge \vec{b} = 2\vec{b} \wedge \vec{a}.$$

b) Dédire de la partie précédente que l'aire $\sigma_{\mathcal{D}}$ du parallélogramme $\mathcal{D}$ construit sur les diagonales du parallélogramme $\mathcal{P}$ est le double de l'aire $\sigma_{\mathcal{P}}$ de ce dernier.

Les vecteurs $\vec{a} + \vec{b}$ et $\vec{b} - \vec{a}$ représentent les deux diagonales du parallélogramme $\mathcal{P}$.

L'aire du parallélogramme construit sur ces deux diagonales vaut

$$\sigma_{\mathcal{D}} = \|(\vec{b} - \vec{a}) \wedge (\vec{a} + \vec{b})\| = 2 \cdot \|\vec{b} \wedge \vec{a}\| = 2 \cdot \sigma_{\mathcal{P}}.$$

Ainsi, l'aire du parallélogramme $\mathcal{D}$ vaut bien le double de l'aire du parallélogramme $\mathcal{P}$.

Exercice 2. ($2 + 2 + 3 = 7$ points)

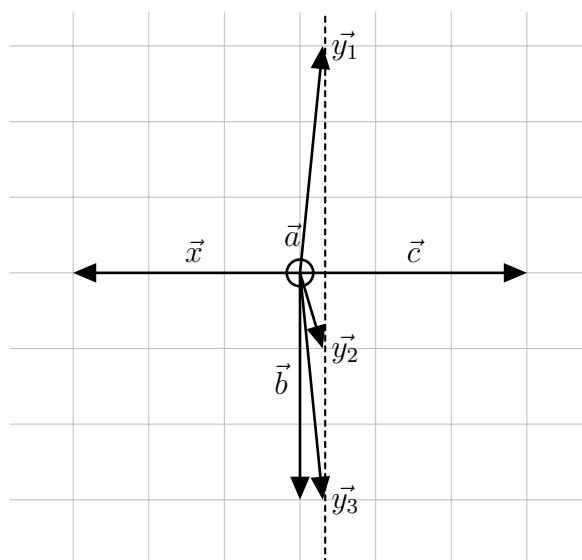
Le grillage ci-dessous est une vue de face d'un plan α perpendiculaire au vecteur $\vec{a}$, qui pointe en direction de l'observateur.

Le vecteur $\vec{b}$ se situe dans le plan α .

De plus, $\|\vec{a}\| = 1$ et $\|\vec{b}\| = 3$.

Représenter graphiquement

- i) le vecteur $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$;
- ii) un vecteur $\vec{x}$ du plan α , tel que $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$;
s'il y a plusieurs solutions, en représenter trois en les nommant $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ et $\vec{x}_3$;
- iii) un vecteur $\vec{y}$ du plan α , tel que $\vec{b} \times \vec{y} = \vec{a}$;
s'il y a plusieurs solutions, en représenter trois en les nommant $\vec{y}_1, \vec{y}_2$ et $\vec{y}_3$;



Exercice 3. (3 + 2 + 2 + 5 + 5 = 17 points)

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère une pyramide $ABCD S$ de volume 2, avec

$$A(1; 0; -2), \quad B(2; -1; 0), \quad C(1; -2; 2) \quad \text{et} \quad D(0; -1; 0)$$

a) Montrer que les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ et $\vec{e}_1$ sont coplanaires.

$$\text{Ils sont coplanaires car } [\vec{e}_1; \vec{AB}; \vec{AD}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 0 + 0 = 0.$$

b) Vérifier que la base $ABCD$ de la pyramide forme un parallélogramme.

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{DC} \quad \text{ou alors} \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{AD}.$$

c) Calculer l'angle en A de la base $ABCD$.

$$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = -1 + 1 + 4 = 4 = \|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AD}\| \cdot \cos \alpha = 6 \cos \alpha$$

$$\text{Ainsi, } \cos \alpha = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad \text{d'où} \quad \alpha \simeq 48.18^\circ \simeq 0.841 \text{ rad.}$$

d) Déterminer la hauteur de la pyramide $ABCD S$.

$$\text{L'aire de la base vaut } b = \|\vec{AB} \times \vec{AD}\|, \quad V = 2 = \frac{1}{3} b \cdot h \quad \text{d'où} \quad h = \frac{6}{\|\vec{AB} \times \vec{AD}\|}.$$

$$\vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & 1 & -1 \\ \vec{e}_2 & -1 & -1 \\ \vec{e}_3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\|\vec{AB} \times \vec{AD}\| = \sqrt{0 + 16 + 4} = 2\sqrt{5} \simeq 4.472136 \quad \text{d'où} \quad h = \frac{6}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \simeq 1.34164.$$

Pour calculer $\|\vec{AB} \times \vec{AD}\|$, on peut aussi utiliser la formule $\|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AD}\| \cdot \sin \alpha$:

$$\text{On a } \|\vec{AB}\| = \|\vec{AD}\| = \sqrt{6} \quad \text{et} \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \stackrel{\text{b)}}{=} \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$\text{Ainsi, on obtient } \|\vec{AB} \times \vec{AD}\| = \sqrt{6} \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{6\sqrt{5}}{3} = 2\sqrt{5} \quad \text{comme précédemment.}$$

e) Déterminer les coordonnées du sommet S sachant qu'il est situé sur l'axe Oz .

$$S(0, 0, z). \quad V = \frac{1}{3} |\det(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AS})| = 2. \quad \vec{AS} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ z+2 \end{pmatrix}$$

$$\det(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AS}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & z+2 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 0 + (z+2) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2(z+2)$$

$$\text{Ainsi, } V = \frac{1}{3} |-2(z+2)| = 2 \Leftrightarrow z+2 = \pm 3 \Leftrightarrow z = 1 \text{ ou } z = -5.$$

Il y a deux possibilités : $S_1(0, 0, 1)$ et $S_2(0, 0, -5)$.

On obtient les mêmes solutions en déterminant l'équation de $\pi = (ABCD)$: $2y + z + 2 = 0$

$$\text{et en résolvant l'équation } \delta(S; \pi) = h = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Exercice 4. (2 + 4 = 6 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$, on donne la sphère Σ par l'équation

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z + 10 = 0$$

Déterminer le centre C et le rayon r du cercle γ d'intersection de Σ avec le plan Oxy .

On détermine d'abord le centre C_1 et le rayon r_1 de la sphère Σ :

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 + 10 - 4 - 9 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 4$$

Ainsi, $C_1(2; -3; 1)$ et $r_1 = 2$.

Pour déterminer la suite, voici deux méthodes :

Méthode 1 : On construit la droite p perpendiculaire au plan passant par C_1 :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le centre C se trouve à l'intersection du plan Oxy et de la droite p .

Comme $z = 0$, on obtient $1 + m = 0 \Rightarrow m = -1$, donc $C(2; -3; 0)$.

Pour déterminer le rayon, on utilise Pythagore dans le triangle C_1CP avec P un point sur la sphère et sur le cercle. Comme $\overrightarrow{C_1C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on obtient

$$r = \sqrt{r_1^2 - \|\overrightarrow{C_1C}\|^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$$

Méthode 2 : On se place dans le plan Oxy et on travaille en deux dimensions :

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 10 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 + 10 - 4 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 3$$

Le centre cherché est donc $C(2; -3; 0)$ et le rayon est $r = \sqrt{3}$.

Exercice 5. ($2 + 8 + 3 + 5 = 18$ points)

On considère la conique d'équation $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 8\sqrt{13}x - \sqrt{13}y - 5 = 0$.

a) De quel type de coniques s'agit-il ? Justifier la réponse par un seul calcul !

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - ac = (6)^2 - 9 \cdot 4 = 0$, donc c'est une parabole.

b) Effectuer un changement de variables (qu'on appelle u et v) pour éliminer le double produit xy , en explicitant les différentes étapes.

On cherche les valeurs propres puis les vecteurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$.

$\det(A - \lambda I) = (9 - \lambda)(4 - \lambda) - 36 = -\lambda(\lambda - 13)$ d'où les valeurs propres 13 et 0.

On calcule facilement que $E_{13} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ et $E_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$.

En normalisant les vecteurs propres, on pose $\vec{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

qui forment bien une base orthonormée.

On obtient alors le changement de variables $x = \frac{1}{\sqrt{13}}(3u + 2v)$ et $y = \frac{1}{\sqrt{13}}(2u - 3v)$.

En remplaçant dans l'équation de base et en simplifiant, il vient

$$13u^2 - 26u - 13v - 5 = 0.$$

En posant $\vec{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, on obtient le changement de variable

$x = \frac{1}{\sqrt{13}}(2u + 3v)$ et $y = \frac{1}{\sqrt{13}}(-3u + 2v)$. Les rôles de u et v s'inversent et il vient

$$13v^2 - 13u - 26v - 5 = 0.$$

c) Effectuer un changement de variables pour obtenir une équation de la forme $Y = a X^2$.

On complète le carré en u puis on place le sommet à l'origine :

$$13u^2 - 26u - 13v - 5 = 0 \Leftrightarrow 13(u - 1)^2 - 13 - 13v - 5 = 0 \Leftrightarrow 13(u - 1)^2 = 13v + 18 \Leftrightarrow (u - 1)^2 = v + \frac{18}{13}$$

On pose alors $X = u - 1$ et $Y = v + \frac{18}{13}$ pour obtenir l'équation $Y = X^2$.

d) Déterminer le sommet de la conique et l'équation de son axe dans les coordonnées $(x; y)$.

Avec les coordonnées $(X; Y)$, le sommet de la parabole est $(0; 0)$ et son axe est $X = 0$.

Avec les coordonnées $(u; v)$, le sommet de la parabole est $\left(1; -\frac{18}{13}\right)$ et son axe est $u = 1$.

Finalement, avec les coordonnées $(x; y)$, le sommet de la parabole a pour coordonnées

$$x = \frac{1}{\sqrt{13}}(3 - 36/13) = \frac{3\sqrt{13}}{169} \simeq 0,064 \text{ et } y = \frac{1}{\sqrt{13}}(2 + 54/13) = \frac{80}{13\sqrt{13}} = \frac{80\sqrt{13}}{169} \simeq 1,7$$

Son axe a pour direction $\vec{f}_2$ et passe par le sommet d'où son équation

$$3x + 2y - 3 \cdot \frac{3\sqrt{13}}{169} - 2 \cdot \frac{80\sqrt{13}}{169} = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y - \sqrt{13} = 0.$$

Exercice 6. ($3 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 = 10$ points)

Dans un repère orthonormé, on donne les droites a et b par leurs équations paramétriques

$$a : \begin{cases} x = -8 - 6k \\ y = 7 + 4k \\ z = 5 + 3k \end{cases} \quad \text{et} \quad b : \begin{cases} x = n \\ y = -5 + 4n \\ z = 1 + 2n \end{cases}$$

Les deux extrémités A et B d'un segment parallèle au plan Oxz et de longueur 5 sont situées respectivement sur les droites a et b .

Déterminer les coordonnées des points A et B .

$$\left. \begin{array}{l} A(-8 - 6k ; 7 + 4k ; 5 + 3k) \\ B(n ; -5 + 4n ; 1 + 2n) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} n + 6k + 8 \\ 4n - 4k - 12 \\ 2n - 3k - 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \text{ parallèle à } Oxz \Leftrightarrow 4n - 4k - 12 = 0 \Leftrightarrow n = k + 3.$$

$$\text{Ainsi, } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7k + 11 \\ 0 \\ -k + 2 \end{pmatrix}$$

$$\| \overrightarrow{AB} \|^2 = 25 \Leftrightarrow (7k + 11)^2 + (-k + 2)^2 = 25 \Leftrightarrow 50k^2 + 150k + 100 = 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 + 3k + 2 = 0 \Leftrightarrow (k + 1)(k + 2) = 0$$

Il y a deux solutions :

$$k = -1 \Rightarrow n = 2 \Rightarrow A_1(-2; 3; 2) \text{ et } B_1(2; 3; 5)$$

$$k = -2 \Rightarrow n = 1 \Rightarrow A_1(4; -1; -1) \text{ et } B_2(1; -1; 3)$$