

Série 35 & 36

Exercice 1. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on rappelle que l'exponentielle complexe est définie par

$$e^{\theta i} := \cos(\theta) + i \sin(\theta).$$

Vérifie que $e^{2\pi i} = 1$, $e^{\pi i} = -1$, $e^{\frac{\pi}{2}i} = i$, $e^{\frac{3\pi}{2}i} = -i$. Démontre aussi que pour deux complexes $z = \rho e^{i\theta}$ et $z' = \rho' e^{i\theta'}$, on a :

$$zz' = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}, \quad z^{-1} = \rho^{-1} e^{-i\theta}, \quad -z = \rho e^{i(\theta+\pi)}.$$

Exercice 2. Mets les nombres complexes suivants sous forme algébrique (c'est-à-dire sous la forme $a + bi$ avec $a, b \in \mathbb{R}$).

- | | |
|---|---|
| a) $(3 - 5i) + (-2 - 4i) - (1 - 2i)$; | j) $\frac{5+3i}{2+4i}$; |
| b) $3(5 - 2i) + 2(7 - i) - 3(4 - 3i)$; | k) $\left(\frac{63+16i}{4+3i}\right)^2$; |
| c) $(9 + 5i)(2 - 7i)$; | l) $e^{\frac{3\pi i}{2}}$; |
| d) $(3 + 2i)(3 - 2i)$; | m) $\sqrt{2}ie^{\frac{\pi i}{2}}$; |
| e) $(3 - 4i)^2$; | n) $\frac{2e^{\frac{\pi i}{3}}}{1+i}$; |
| f) $(1 + i)^4$; | o) $\frac{i}{e^{\frac{\pi i}{4}}}$; |
| g) $\frac{1}{i}$; | p) $\frac{a+bi}{c+di}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$; |
| h) $\frac{1}{2+3i}$; | q) i^n pour $n \in \mathbb{N}$. |
| i) $\frac{1+i}{1-i}$; | |

Exercice 3. Représente les points suivants dans le plan complexe :

$$\begin{array}{llll} z_A = 2 - i, & z_B = -3 + 2i, & z_C = z_A + z_B, & z_D = z_A - z_B, \\ z_E = \frac{z_A + \overline{z_A}}{2}, & z_F = \frac{z_A - \overline{z_A}}{2}, & z_G = -z_A, & z_H = -\overline{z_A}. \end{array}$$

Exercice 4. Soient $z, w \in \mathbb{C}$. Montre que

- | | |
|---|--|
| a) $\overline{\overline{z}} = z$; | e) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$ si $w \neq 0$; |
| b) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$; | f) $ z ^2 = z\overline{z}$; |
| c) $\overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$; | g) $\left \frac{z}{w}\right = \frac{ z }{ w }$ si $w \neq 0$; |
| d) $\overline{z\overline{w}} = \overline{z} w$; | h) $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{ z ^2}$ si $z \neq 0$. |

Exercice 5. Donne les sous-ensembles des $z \in \mathbb{C}$ déterminés par les conditions suivantes :

- | | |
|--------------------------|--|
| a) $\overline{z} = z$; | d) $\left \frac{z-1}{z+1}\right = 1$; |
| b) $\overline{z} = -z$; | e) $ z - 1 > z - 2 $; |
| c) $ z + i \leq 1$; | f) $\text{Im}(az) = b$ pour $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{R}$. |

Exercice 6. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montre que

- a) $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$; c) $z\bar{z} = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2$; e) $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$.
b) $z - \bar{z} = 2\operatorname{Im}(z)i$; d) $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$;

Exercice 7. Mets les nombres suivants sous forme exponentielle :

- a) 1; d) $-1 - i$; g) $12 + 5i$.
b) i ; e) $-1 - \sqrt{3}i$;
c) -2 ; f) $3 + 4i$;

Exercice 8. Formule de Moivre. Montre par récurrence que

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \theta \in \mathbb{R}.$$

Exercice 9. Calcule :

- a) $(1 + \sqrt{3}i)^7$; b) $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+\sqrt{3}i}\right)^9$; c) $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$.

Exercice 10. Détermine les formes algébriques et exponentielles des nombres $z \in \mathbb{C}$ qui satisfont respectivement les équations

$$z^4 = 1 + i, \quad z^6 = 1 \quad \text{et} \quad z^5 = -32,$$

et représente-les dans le plan complexe.

Exercice 11.

- a) Pour un réel positif $a > 0$, détermine l'ensemble E_a de tous les $z \in \mathbb{C}$ qui satisfont la condition $|z| = a$.
b) Montre que pour tout $a > 0$, $z \in E_a$ si et seulement si $\bar{z} \in E_a$.
c) Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $w \in E_a$. Détermine l'ensemble de tous les $z \in \mathbb{C}$ tels que $wz \in E_b$. L'application $z \mapsto wz$ ainsi définie est-elle surjective sur E_b ? Justifie ta réponse.

Exercice 12. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses? Démontre ta réponse.

- a) Il existe un $z \in \mathbb{C}$ tel que

$$z + \frac{1}{z} = 0.$$

- b) Le module de $(1 + i)^{16}$ vaut 256.
c) Le sous-ensemble $\{(e^{\frac{\pi}{4}i})^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ de \mathbb{C} contient un nombre infini d'éléments.

Exercice 13. Soit U l'ensemble des nombres complexes de module 1. Montre que le produit, le conjugué et l'inverse d'un élément de U est encore dans U . Peut-on en dire autant de la somme, de l'opposé et de la racine n -ième avec $n \in \mathbb{N}$? Déduis-en une structure de groupe sur U .

Exercice 14. Soient $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $a + b$ et ab sont réels. Démontre que $a, b \in \mathbb{R}$ ou $b = \bar{a}$.

Exercice 15. Soient a, b, c trois points de du plan complexe. Montre que a, b, c appartiennent à une même droite si et seulement s'il existe trois réels α, β, γ tels que

$$(\alpha; \beta; \gamma) \neq (0; 0; 0), \quad \alpha + \beta + \gamma = 0 \quad \text{et} \quad \alpha a + \beta b + \gamma c = 0.$$