

V. Mouvements dans l'espace

Le sujet de ce jour nous ramène à la géométrie vectorielle avec la définition de mouvements dans l'espace puis de forme bilinéaire. Nous retrouverons le produit vectoriel que nous connaissons déjà et découvrirons une de ses propriétés remarquables.

Nous terminerons le cours avec la notion de polaire, dont nous aurons besoin la semaine prochaine pour étudier un type de transformations du plan inhabituelles : les inversions.

1 Mouvements dans l'espace

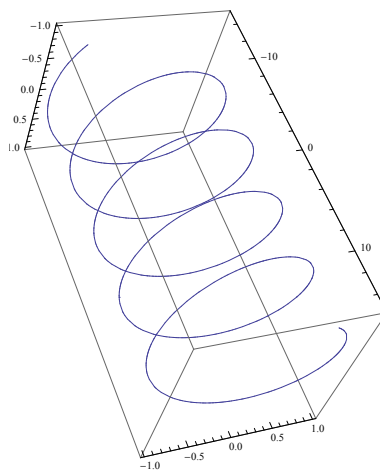
Vous avez étudié les isométries du plan en détail, puis celles de l'espace. L'idée de l'étude des "mouvements" est que les isométries directes peuvent s'interpréter comme des déformations continues de l'espace. Par exemple, pour effectuer une translation horizontale de 30 centimètres, disons d'un crayon, nous pouvons le soulever et le déplacer continûment pour l'amener à la position désirée. Nous faisons cette étude de mouvement dans $\mathbb{R}^3$ à cause de nos motivations, mais pourrions tout aussi bien remplacer l'espace par $\mathbb{R}^n$ pour tout $n \geq 1$.

Définition 1.1. Une fonction réelle $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ est déterminée par ses trois coordonnées f_1, f_2, f_3 telles que $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Une telle fonction est *continue* si ses fonctions de coordonnées f_1, f_2 et f_3 sont des fonctions réelles continues.

Exemple 1.2. La fonction $f(t) = (\cos t; \sin t; t)$ est *continue car chacune des fonctions f_1, f_2, f_3 est continue.*

Elle est même infiniment continûment dérivable.

Elle décrit une hélice infinie qui se situe sur le cylindre droit d'axe Oz et de rayon 1.



Définition 1.3. Un *mouvement* est une famille d'isométries g_t de $\mathbb{R}^3$ telle que, pour $t \in [0, 1]$,

- a) g_0 est l'identité;
- b) pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, la fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ avec $t \mapsto g_t(x)$ est continue.

Exemple 1.4. Translation continue. Soit $v = (v_1, v_2, v_3)$ un point de $\mathbb{R}^3$ et posons

$$g_t(x) = x + tv, \quad \forall t \in [0, 1].$$

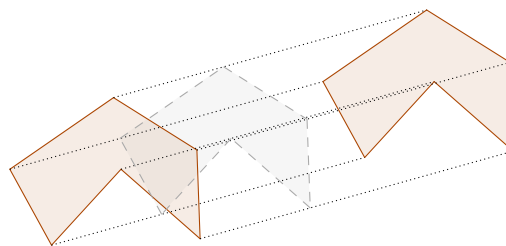
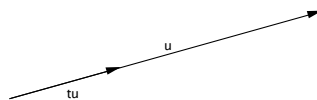
Alors $g_0(x) = x$

Et pour $x \in \mathbb{R}^3$ fixé,

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{est continue car}$$

$$t \mapsto x + tv$$

chaque fonction $f_i = x_i + tv_i$ est continue.



Concentrons-nous à présent sur les mouvements de l'espace décrits en termes vectoriels.

Exemple 1.5. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires et de même norme de $V(\mathbb{R}^3)$ et soient les flèches $\overrightarrow{OU}$ et $\overrightarrow{OV}$ dans $\mathbb{R}^3$, d'origine O , qui représentent les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Nous aimerions construire un mouvement qui amène $\vec{u}$ sur $\vec{v}$. Comment faire ?

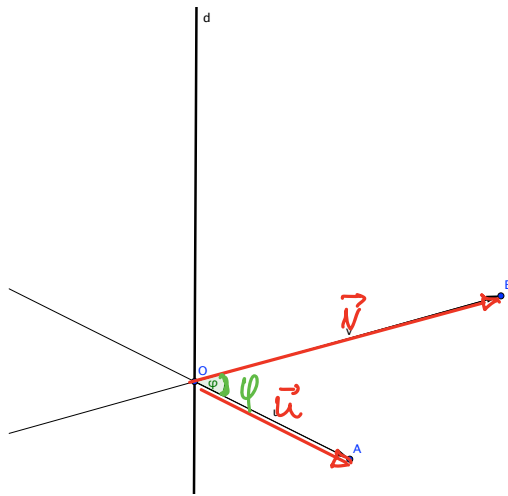
Soit $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$, un vecteur non nul perpendiculaire à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$ et soit φ l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Posons, pour tout $0 \leq t \leq 1$, $g_t(x) = \rho_{t\varphi}(x)$

où ρ_α est la rotation d'angle α et d'axe $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$

Alors $g_0(x) = x$ et pour x fixé, $f: [0; 1] \rightarrow \mathcal{V}_3$
 $t \rightarrow \rho_{t\varphi}(x)$.

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \quad \vec{e}_3 = \frac{\vec{d}}{\|\vec{d}\|} \quad \text{et} \quad \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1$$



Relativement à $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$
 orthonormée et directe,

$$R_{t\varphi} = \begin{pmatrix} \cos t\varphi & -\sin t\varphi & 0 \\ \sin t\varphi & \cos t\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

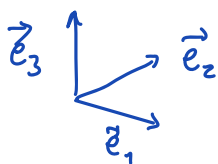
est la matrice de l'application
 de $\rho_{t\varphi}$.

$$\text{Ainsi, } g_t(\vec{x}) = R_{t\varphi} \vec{x}.$$

Proposition 1.6.

Les isométries g_t qui constituent un mouvement sont directes, c'est-à-dire, préservent l'orientation.

Démonstration. Fixons un repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et suivons les vecteurs de base pendant le mouvement g_t . Pour fixer les idées, supposons que le vecteur $\vec{e}_3$ se trouve dans le demi-espace "supérieur" délimité par le plan $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$, c'est-à-dire celui dans lequel on visse un tire-bouchon en amenant $\vec{e}_1$ sur $\vec{e}_2$. Le raisonnement est le même dans le cas contraire.



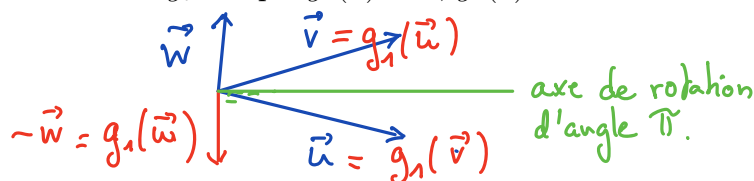
Puisque g_t est une isométrie $\forall t$, chaque triplet $(g_t(\vec{e}_1), g_t(\vec{e}_2), g_t(\vec{e}_3))$ forme une base orthonormée de V_3 , donc une famille libre.

En particulier, $g_t(\vec{e}_3)$ n'est jamais dans le plan $\langle g_t(\vec{e}_1), g_t(\vec{e}_2) \rangle$.

Puisque les $g_t(\vec{e}_i)$ sont continues, $g_t(\vec{e}_3)$ restera toujours "du même côté" des plans $\langle g_t(\vec{e}_1), g_t(\vec{e}_2) \rangle$.

$\Rightarrow$ l'orientation ne change pas. Seules les isométries directes sont des mouvements. $\square$

Exemple 1.7. Si $\vec{u} = \overrightarrow{OU}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OV}$ sont deux vecteurs de $V(\mathbb{R}^3)$ de même norme et $\vec{w} = \overrightarrow{OW}$ un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$, alors il existe un mouvement g_t tel que $g_1(\vec{u}) = \vec{v}$, $g_1(\vec{v}) = \vec{u}$ et par suite, $g_1(\vec{w}) = -\vec{w}$.



2 Forme bilinéaire

Définition 2.1. Soient U, V et W trois K -espaces vectoriels et $\alpha : U \times V \rightarrow W$ une application. On dit que α est *bilinéaire* si $\alpha(u, -) : V \rightarrow W$ et $\alpha(-, v) : U \rightarrow W$ sont linéaires pour tout $u \in U$ et tout $v \in V$.

Exemple 2.2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice à coefficients réels.

Soit $\alpha : V(\mathbb{R}^2) \times V(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\alpha(X; Y) = X^T A Y$

$$\text{Ainsi, } \alpha(X; Y) = X^T A Y = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ay_1 + by_2 \\ cy_1 + dy_2 \end{pmatrix} \\ = ax_1y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_1 + dx_2y_2$$

$$\text{et } \alpha(X; rY + sZ) = \dots = r \alpha(X; Y) + s \alpha(X; Z)$$

$$\text{De même, } \alpha(rX + sY; Z) = r \alpha(X; Z) + s \alpha(Y; Z)$$

Cette application est bilinéaire. On dit que c'est une *forme bilinéaire* de $V(\mathbb{R}^2)$.

Exemple 2.3. Le produit vectoriel $\wedge : V(\mathbb{R}^3) \times V(\mathbb{R}^3) \rightarrow V(\mathbb{R}^3)$ est une forme bilinéaire.

En effet, on a bien

$$\vec{u} \wedge (\alpha \vec{v} + \beta \vec{w}) = \alpha \vec{u} \wedge \vec{v} + \beta \vec{u} \wedge \vec{w} \\ \text{et } (\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) \wedge \vec{w} = \alpha \vec{u} \wedge \vec{w} + \beta \vec{v} \wedge \vec{w}$$

Le théorème du jour affirme que la seule application bilinéaire de l'espace qui est **invariante par tous les mouvements** est le produit vectoriel.

Ce résultat est essentiel en physique pour aborder les mouvements des astres en cosmologie car le moment cinétique $\vec{L} = \vec{R} \wedge \vec{P}$ où $\vec{R}$ est le vecteur position et $\vec{P}$ la quantité de mouvement $m\vec{v}$.

Théorème 2.4. Soit $j : \mathbb{V}(\mathbb{R}^3) \times \mathbb{V}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{V}(\mathbb{R}^3)$ une application telle que

a) j est bilinéaire ;

b) $j(g_t(\vec{u}), g_t(\vec{v})) = g_t(j(\vec{u}, \vec{v}))$ pour tous les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et tout mouvement g_t .

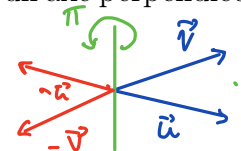
Alors il existe un nombre réel λ tel que $j(\vec{u}, \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$.

Démonstration. Observons d'abord que par bilinéarité $j(\vec{u}, \vec{0}) = \vec{0}$ et $j(\vec{0}, \vec{v}) = \vec{0}$.

Nous supposons que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls dès maintenant.

Commençons par montrer que $\vec{w} = j(\vec{u}, \vec{v})$ est toujours orthogonal aux deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Considérons le mouvement g_t correspondant à la rotation d'angle π autour d'un axe perpendiculaire au plan $(\vec{u}, \vec{v})$ que vous décrirez en exercice.



Alors, $g_1(\vec{u}) = -\vec{u}$ et $g_1(\vec{v}) = -\vec{v}$.

De plus, si $j(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{n} + \vec{k}$ avec $\vec{n}$ normal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{k} \in \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, alors par bilinéarité,

$$j(-\vec{u}, -\vec{v}) = -j(\vec{u}, -\vec{v}) = j(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{n} + \vec{k}$$

D'autre part, par invariance par rapport au mouvement g_t , on a

$$j(-\vec{u}, -\vec{v}) = j(g_1(\vec{u}), g_1(\vec{v})) \stackrel{b)}{=} g_1(j(\vec{u}, \vec{v})) = g_1(\vec{n} + \vec{k}) = \vec{n} - \vec{k}$$

Par conséquent, $\vec{n} + \vec{k} = \vec{n} - \vec{k} \Rightarrow \vec{k} = \vec{0} \Rightarrow j(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{n}$ qui est $\perp$ à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$

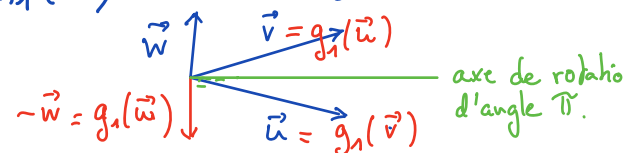
Montrons maintenant que $j(\vec{u}, \vec{v}) = -j(\vec{v}, \vec{u})$.

Le deuxième mouvement h_t que vous décrirez en exercice échange deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de même norme et renverse les vecteurs $\vec{n}$ qui leur sont perpendiculaires.

Ainsi, $h_1(\vec{u}) = \vec{v}$ et $h_1(\vec{v}) = \vec{u}$ et par suite,

$$j(\vec{v}, \vec{u}) = j(h_1(\vec{u}), h_1(\vec{v})) \stackrel{b)}{=} h_1(j(\vec{u}, \vec{v})) = h_1(\vec{n}) = -\vec{n} = -j(\vec{u}, \vec{v})$$

Remarquons en particulier que $j(\vec{u}, \vec{u}) = \vec{0}$.



Choisissons maintenant une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\mathbb{V}(\mathbb{R}^3)$.

Nous savons que $j(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \lambda_{ij}\vec{e}_k$ pour $1 \leq i \neq j \leq 3$ et $k \neq i, j$ puisque le vecteur obtenu est orthogonal à $\vec{e}_i$ et à $\vec{e}_j$. De plus $\lambda_{ij} = -\lambda_{ji}$. Observons encore que

$$\begin{aligned} 0 &= j(\vec{e}_1, \vec{e}_2 + \vec{e}_3) \cdot (\vec{e}_2 + \vec{e}_3) \stackrel{\text{lin.}}{=} \left(j(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + j(\vec{e}_1, \vec{e}_3) \right) \cdot (\vec{e}_2 + \vec{e}_3) \\ &= (\lambda_{12}\vec{e}_3 + \lambda_{13}\vec{e}_2) \cdot (\vec{e}_2 + \vec{e}_3) \stackrel{\text{distr.}}{=} \\ &= \lambda_{12} \underbrace{\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2}_{=0} + \lambda_{12} \underbrace{\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3}_{=1} + \lambda_{13} \underbrace{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2}_{=1} + \lambda_{13} \underbrace{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3}_{=0} = \lambda_{12} + \lambda_{13} \end{aligned}$$

d'où $\lambda = \lambda_{12} = -\lambda_{13}$. De même $\lambda_{23} = \lambda_{12}$. Nous en déduisons donc par bilinéarité que

$$\begin{aligned} j\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) &= j(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3; y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3) \stackrel{\text{bilinéarité de } j}{=} \\ &= x_1y_1 \underbrace{j(\vec{e}_1, \vec{e}_1)}_{=0} + x_1y_2 \underbrace{j(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}_{=\lambda\vec{e}_3} + x_1y_3 \underbrace{j(\vec{e}_1, \vec{e}_3)}_{=-\lambda\vec{e}_2} + x_2y_1 \underbrace{j(\vec{e}_2, \vec{e}_1)}_{=-\lambda\vec{e}_3} + \dots \\ &= \lambda \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \square \end{aligned}$$

Pour terminer, nous devons encore montrer que le produit vectoriel vérifie effectivement les deux conditions imposées, c'est-à-dire la bilinéarité et l'invariance par mouvements.

La bilinéarité se vérifie facilement. Le théorème qui suit affirme l'invariance par mouvements.

Théorème 2.5. *Le produit vectoriel est invariant par mouvement : pour tous les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et tout mouvement g_t , on a $g_t(\vec{u}) \wedge g_t(\vec{v}) = g_t(\vec{u} \wedge \vec{v})$*

Démonstration. Il suffit de montrer que l'égalité est vraie pour toute isométrie directe g puisque la proposition 1.6 de la section précédente nous assure que g_t est directe pour tout t .

Nous pouvons aussi supposer que g fixe l'origine puisqu'une translation n'affecte pas les vecteurs et que le produit vectoriel se calcule précisément sur des vecteurs.

Nous sommes ainsi ramenés au cas où l'isométrie est une *rotation*.

Au début de ce module, nous avons vu que le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur

Propriétés conservées par rotation.

de direction	orthogonale à $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$
de sens	positif, c'est-à-dire $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}) \geq 0$
de norme	$\sigma(\vec{u}, \vec{v}) = \ \vec{u}\ \cdot \ \vec{v}\ \cdot \sin \alpha$ où $\alpha = \angle(\vec{u}, \vec{v})$

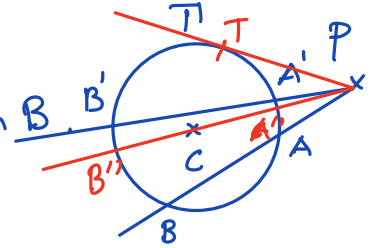
Ainsi, pour toute rotation g_α , $g(\vec{u}) \wedge g(\vec{v}) = g(\vec{u} \wedge \vec{v})$. □

3 La polaire

On se donne un cercle Γ , de centre $C = (\alpha; \beta)$ et de rayon r , et un point $P = (a; b)$ du plan.

Le **théorème du produit constant** nous dit que le produit

le produit $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ ne dépend pas de la demi droite issue de P qui coupe Γ en A et en B .
 Comme A, B et P sont alignés, $\overrightarrow{PA} = k \overrightarrow{PB}$
 $\Rightarrow \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \|\overrightarrow{PA}\| \cdot \|\overrightarrow{PB}\| \cdot \underbrace{\cos 0}_{=1}$



Définition 3.1. On appelle *puissance* du point P relativement au cercle Γ le produit scalaire

$$p(P; \Gamma) = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}.$$

Proposition 3.2. Soit Γ un cercle de centre $C = (\alpha; \beta)$ et $P = (a; b)$ un point du plan. Alors

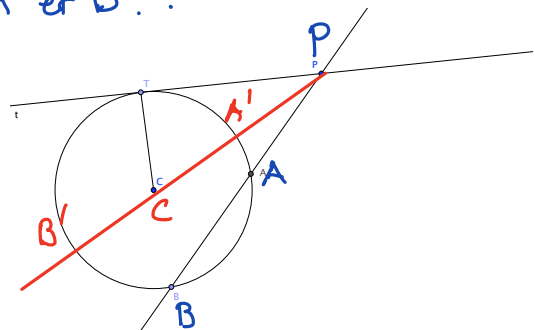
$$p(P; \Gamma) = \|\overrightarrow{CP}\|^2 - r^2 = (a - \alpha)^2 + (b - \beta)^2 - r^2 = \|\overrightarrow{PT}\|^2,$$

où T désigne le point de contact d'une tangente au cercle passant par P . La dernière égalité n'est valide que si P est extérieur au cercle.

Démonstration.

La première et la deuxième égalités sont obtenues en calculant $p(P, \Gamma)$ avec la droite PC qui coupe Γ en A' et B' :

$$\begin{aligned} p(P, \Gamma) &= \|\overrightarrow{PA'}\| \cdot \|\overrightarrow{PB'}\| \\ &= (\|\overrightarrow{PC}\| - r) \cdot (\|\overrightarrow{PC}\| + r) \\ &= \|\overrightarrow{PC}\|^2 - r^2 \end{aligned}$$



La dernière égalité s'obtient en calculant $p(P, \Gamma)$ à l'aide d'une des tangentes issues de P :

$$p(P, \Gamma) = \|\overrightarrow{PT}\| \cdot \|\overrightarrow{PT}\|.$$

□

Définition 3.3. Soit Γ un cercle de centre C et de rayon r et P un point du plan distinct de C . La *polaire* de P relativement à Γ est le lieu géométrique des points M vérifiant la relation

$$\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CM} = r^2.$$

Si le cercle est donné par son équation canonique cartésienne comme ci-dessus et $P = (a; b)$, alors l'équation des points $(x; y)$ de la polaire p de P relativement à Γ est

$$p : (a - \alpha)(x - \alpha) + (b - \beta)(y - \beta) - r^2 = 0.$$

C'est la même équation que celle de la tangente en un point du cercle ! On en déduit deux informations. La première, c'est que la polaire est une droite, la seconde que la notion de polaire généralise celle de tangente.

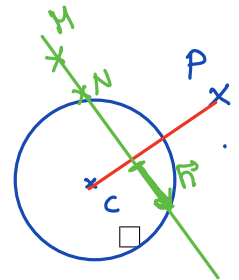
Proposition 3.4.

La polaire d'un point P relativement à un cercle Γ est une droite perpendiculaire au diamètre de Γ passant par P .

Démonstration. Soit M un point de la polaire et $\vec{n}$ un vecteur normal à la droite CP .

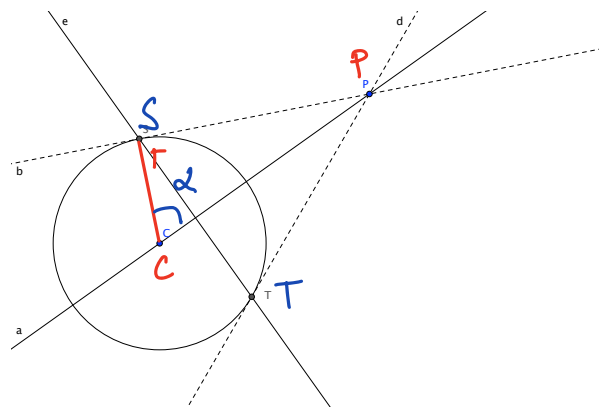
Si N est un point obtenu comme $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} + \lambda \vec{n}$, on a

$$\vec{CP} \cdot \vec{CN} = \vec{CP} \cdot (\vec{CM} + \lambda \vec{n}) = \underbrace{\vec{CP} \cdot \vec{CM}}_{= r^2} + \lambda \underbrace{\vec{CP} \cdot \vec{n}}_{= 0} = r^2$$



Exemple 3.5. Lorsque le point P est à l'extérieur du cercle, considérons les points de tangence S et T des tangentes au cercle passant par P .

$$\begin{aligned} \vec{CP} \cdot \vec{CS} &= \\ \|\vec{CP}\| \cdot \|\vec{CS}\| \cdot \cos \alpha &= \\ \cancel{\|\vec{CP}\|} \cdot \|\vec{CS}\| \cdot \frac{\|\vec{CS}\|}{\cancel{\|\vec{CP}\|}} &= r^2 \end{aligned}$$



La polaire est donc la droite passant par S et T .

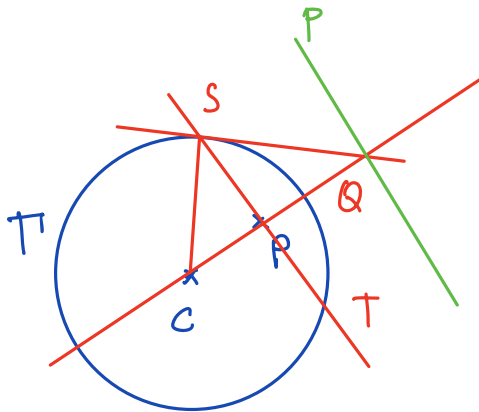
Si P est à l'intérieur du cercle, nous utilisons le théorème suivant pour construire sa polaire.

Théorème 3.6. de réciprocité. Soient p et q les polaires de deux points P et Q relativement au même cercle. Alors $P \in q$ si et seulement si $Q \in p$.

Démonstration. Si P appartient à la polaire de Q alors

$$\overrightarrow{CQ} \cdot \overrightarrow{CP} = r^2 \quad \text{qui est équivalent à} \quad \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CQ} = r^2.$$

Donc Q appartient à la polaire de P . □



- Tracer CP .
- La perpendiculaire à CP passant par P coupe Γ en S et T .
- La perpendiculaire à CS passant par S coupe CP en Q .
- La polaire de P est la perpendiculaire à CP en Q .