Leonid Monin
Léo Navarro Chafloque

EPFL, semestre de printemps 2026
Rings and fields

Exercices – Semaine 14

Exercice 1.
Soit K un corps, et soit $K \subseteq M = K(\alpha)$ et $K \subseteq N = K(\beta)$ des extensions galoisiennes de K.

1. Démontrez que $K \subseteq L = K(\alpha, \beta)$ est aussi galoisienne.

   Supposons à partir de maintenant que $M \cap N = K$ en tant que sous-corps de L.

2. Démontrez que $\mathrm{Gal}(L/K) \to \mathrm{Gal}(M/K) \times \mathrm{Gal}(N/K)$ qui est la restriction sur chaque composante est un isomorphisme.

Exercice 2 (Correspondance de Galois)**.**
Calculez les groupes de Galois $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ puis exprimez tous les sous-corps intermédiaires avec leur sous-groupe correspondant ainsi que des éléments primitifs* et polynôme minimaux pour ceux-ci des extensions Galoisiennes E de $\mathbb{Q}$ donnés par

1. le corps de décomposition de $x^3 - 2$ dans $\mathbb{C}$,
2. le corps de décomposition de $x^4 - 2$ dans $\mathbb{C}$.

Utilisez ce que vous savez déjà grâce aux exercices de la série 12.

*C'est à dire des générateurs sur $\mathbb{Q}$ de ces extensions intermédiaires.