Corrigé 31

Exercice 1. On a $\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{GF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EB} = \vec{0}$, ce qui montre que ces trois vecteurs sont coplanaires (l'un d'eux peut s'écrire comme combinaison linéaire des deux autres).

Exercice 2. On a $A=(-2;-2)$, $B=(-2;-1)$, $C=(-2;1)$, $D=(-1/2;0)$, $E=(0;-2)$, $F=(1;-4/3)$, $G=(2;-2/3)$, $H=(3;0)$, $I=(5/2;3/2)$ et $J=(3;2)$.

Exercice 3. Le centre de gravité se trouve à l'intersection des médianes du triangle. Considérons le milieu M du segment $[BC]$, alors d'après le cours,

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$$

Comme le centre de gravité G est situé aux $\frac{2}{3}$ de chaque médiane à partir du sommet correspondant, on a aussi

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG}&=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right)-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}\\&=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix}\dfrac{a_1+b_1+c_1}{3}\\\dfrac{a_2+b_2+c_2}{3}\end{pmatrix},\qquad \text{c'est-à-dire } G=\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3};\frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right).\end{aligned}$$

Exercice 4. Par l'exercice précédent, on a $G=(5/3;-2/3)$. Pour trouver graphiquement le centre de gravité, on construit le milieu D de $[AB]$, et le milieu E de $[AC]$. Le centre de gravité G se trouve alors à l'intersection des droites BE et DC. On peut ensuite mesurer les coordonnées de G.

Exercice 5. Soient $(c_1;c_2)$ les coordonnées du point C. Alors par l'exercice précédent on a $G=(3;4)=\left(\frac{4+c_1}{3};\frac{5+c_2}{3}\right)$, et on en déduit $C=(5;7)$.

Exercice 6. On pourrait poser $A=(a_1;a_2)$, $B=(b_1;b_2)$, $C=(c_1;c_2)$ les sommets du triangle pour obtenir un système de 6 équations à 6 inconnues. Par exemple, si P est le milieu de $[AB]$, N le milieu de $[AC]$, et M le milieu de $[AB]$, les équations seraient $a_1+b_1=-4$, $a_2+b_2=4$, et $a_1+c_1=-2$, $a_2+c_2=8$, et $b_1+c_1=4$, $b_2+c_2=-2$ (écrites ici en ligne plutôt qu'en système pour gagner de la place !). Une autre méthode, bien plus efficace, est d'observer que les 3 triangles APN, BMP et CNM sont obtenus par rotation de MNP d'un demi-tour autour des milieux de ses côtés. On obtient ainsi $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{PN}$. Donc $A=(-5;7)$, $B=(1;-3)$ et $C=(3;1)$.

Exercice 7. Considérons les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$. Si les quatre points sont coplanaires, ces trois vecteurs ne forment pas une base de V_3. Ainsi on peut utiliser la caractérisation des bases de V_3 par les déterminants (vu dans une série précédente) et calculer $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})$. Ce déterminant est nul si et seulement si les vecteurs sont coplanaires — et donc les quatre points également. Or

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-8\\0\\-3\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}-6\\-6\\-5\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad\begin{vmatrix}1&-8&-6\\-3&0&-6\\-1&-3&-5\end{vmatrix}=0-48-54-0-18+120=0.$$

Comme les points sont dans un même plan, les droites AB et CD le sont également. Les droites ne sont donc pas gauches. Pour voir si elles sont parallèles (strictement ou pas), considérons leurs vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}2\\-6\\-2\end{pmatrix}$. Comme $\overrightarrow{CD}=2\cdot\overrightarrow{AB}$, les droites ont des vecteurs directeurs colinéaires, et sont donc parallèles.

Pour voir si les droites sont confondues, on vérifie si $\overrightarrow{AC}$ est colinéaire au vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ ou pas : si il existe λ tel que $\overrightarrow{AC}=\lambda\cdot\overrightarrow{AB}$, alors, comme la 2e composant de $\overrightarrow{AC}$ est nulle, cela impliquerait $\lambda=0$, ce qui est impossible (car sinon $\overrightarrow{AC}=0\cdot\overrightarrow{AB}=\vec{0}$). Les deux droites AB et AC sont donc strictement parallèles.

Pour les droites AB et CE, on procède comme ci-dessus. Avec $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ déjà calculés, on a

$$\overrightarrow{AE}=\begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE})=\begin{vmatrix}1&-8&0\\-3&0&-3\\-1&-3&0\end{vmatrix}=0-24+0-0-9-0=-33\neq0.$$

Les points A, B, C et E ne sont donc pas coplanaires, et les droites AB et CE sont nécessairement gauches.

Exercice 8. Prenons comme base du tétraèdre la face sur le plan Oxy, c'est-à-dire le triangle de sommet $(0;0;0)$, $(3;0;0)$ et $(0;3;0)$. On utilise ensuite une proposition du cours pour calculer le centre de gravité G_1 de ce triangle :

$$G_1 = \left(\frac{0+3+0}{3}; \frac{0+0+3}{3}; 0\right) = (1;1;0)$$

Considérons maintenant le vecteur $\overrightarrow{AG_1}$, où $A = (0;0;3)$. Ce vecteur est donné par $\overrightarrow{AG_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Grâce à la donnée, on peut ainsi calculer les coordonnées du centre de gravité G du tétraèdre de la façon suivante :

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AG_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 3/4 \\ 3/4 \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad G = (\,3/4\,;\,3/4\,;\,3/4\,)$$

Exercice 9. Notons les points $A = (0;11;7)$, $B = (20;10;0)$, $C = (15;23;16)$ et $D = (15;2;19)$. Calculons un vecteur pour chaque arête du tétraèdre :

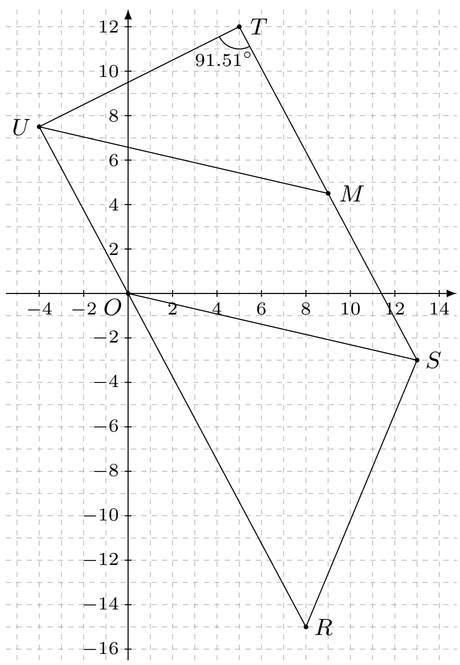
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 20 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 15 \\ -9 \\ 12 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -5 \\ 13 \\ 16 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ 19 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 0 \\ -21 \\ 3 \end{pmatrix}$$

On vérifie que la norme de chacun de ces vecteurs vaut $\sqrt{450} = 15\sqrt{2}$, et donc le tétraèdre est bien régulier.

Exercice 10.

a) Pour le vérifier, déterminons les vecteurs $\overrightarrow{UM}$ et $\overrightarrow{OS}$. Pour cela, calculons $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OS} + 1/2\overrightarrow{ST} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9/2 \end{pmatrix}$.
Ainsi, $\overrightarrow{UM} = \begin{pmatrix} 13 \\ -3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OS}$; les deux vecteurs sont égaux, ce qui signifie que les côtés $[UM]$ et $[OS]$ sont parallèles et de même longueur. Le quadrilatère $OSMU$ est bien un parallèlogramme.
Alternativement, on aurait pu calculer $\overrightarrow{OU} = \begin{pmatrix} -4 \\ 15/2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{SM}$, ce qui signifie que les côtés $[OU]$ et $[SM]$ sont parallèles et de même longueur, et conclure de même.

b) Montrons que ce quadrilatère est un trapèze non-rectangle (attention : la figure ci-dessous pourrait faire croire que le trapèze est rectangle!). En effet, les côtés $[UR]$ et $[TS]$ sont parallèles car $\overrightarrow{UR} = \begin{pmatrix} 12 \\ -45/2 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\cdot\begin{pmatrix} 8 \\ -15 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\cdot\overrightarrow{TS}$. Les côtés $[TS]$ et $[TU]$ ne sont pas perpendiculaires car $\overrightarrow{TS} \bullet \overrightarrow{TU} = \begin{pmatrix} 8 \\ -15 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -9 \\ -9/2 \end{pmatrix} = 8\cdot(-9) + (-15)\cdot(-9/2) = -9/2 \neq 0$. Ainsi les côtés $[TU]$ et $[UR]$ ne sont pas non plus perpendiculaires et donc ce quadrilatère est un trapèze.



Exercice 11. Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, alors

a) $\vec{u} \bullet \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = \|\vec{u}\|^2$;

b) $(a\vec{u}) \bullet \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} au_iv_i = a\sum_{i=1}^{n} u_iv_i = a(\vec{u} \bullet \vec{v})$;

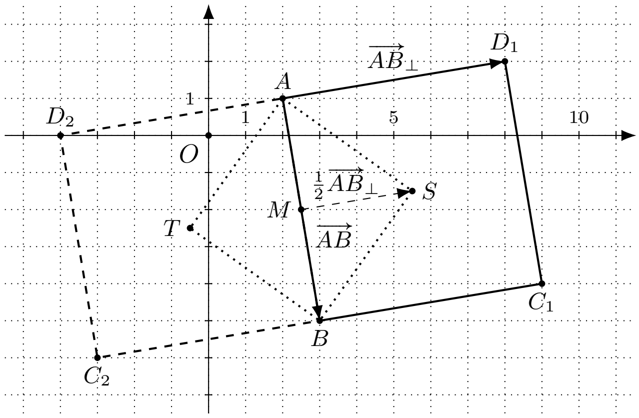
c) $\vec{u} \bullet \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} u_iv_i = \sum_{i=1}^{n} v_iu_i = \vec{v} \bullet \vec{u}$;

d) $\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet (v_1 + w_1; \cdots; v_n + w_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i(v_i + w_i) = \sum_{i=1}^{n}(u_iv_i + u_iw_i) = \sum_{i=1}^{n} u_iv_i + \sum_{i=1}^{n} u_iw_i$
$= \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$.

Exercice 12. Une équation cartésienne de la droite par l'origine ayant $\vec{u}$ comme vecteur directeur, et donc $-\vec{u}_\perp = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$ comme vecteur normal, est $7x - 4y = 0$; son équation réduite est $y = \frac{7}{4}x$, et sa pente est $\frac{7}{4}$.
Une équation cartésienne de la droite perpendiculaire à $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ passant par l'origine est $4x + 7y = 0$, et son équation réduite est $y = -\frac{4}{7}x$; sa pente est donc $-\frac{4}{7}$.

Exercice 13.

a)



b) **i)** Avec $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$, on obtient un premier carré ABC_1D_1 comme suit :

$$\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AB}_\perp = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}_\perp = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Donc $C_1 = (9; -4)$ et $D_1 = (8; 2)$, des coordonnées confirmées par la figure.
On obtient de la même manière un deuxième carré BAD_2C_2 :

$$\overrightarrow{OC_2} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{AB}_\perp = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{OD_2} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB}_\perp = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $C_2 = (-3; -6)$ et $D_2 = (-4; 0)$, des coordonnées qui sont aussi confirmées par la figure.

ii) Pour le carré $ATBS$, on trouve d'abord le point milieu M de $[AB]$ dont les coordonnées sont données par les moyennes de celles de A et de B, soit $M = (\frac{5}{2}; -2)$. La diagonale $[ST]$ doit être de même longueur que, et perpendiculaire à, la diagonale $[AB]$; on exploite ici le vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}_\perp$:

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}_\perp = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OM} - \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}_\perp = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Donc $S = \left(\frac{11}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ et $T = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right)$, des coordonnées confirmées une fois de plus par la figure.

Exercice 14.

a) Faux, car par exemple $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} = 1\cdot 1 + 1\cdot(-2) = -1$.

b) Faux, en prenant le point $(0;0)$ pour origine et les bases $\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ et $\mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)$. Ces repères sont différents car les vecteurs de $\mathcal{B}_1$ sont orthogonaux tandis que ceux de $\mathcal{B}_2$ ne le sont pas.

c) Cette inégalité est toujours vraie, en effet quels que soient $\vec{u}, \vec{v} \in V_n$, on a $\vec{u} \bullet \vec{v} = \cos(\alpha)\cdot\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$ et donc en prenant la valeur absolue de cette égalité, on a

$$|\vec{u} \bullet \vec{v}| = |\cos(\alpha)|\cdot\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$$

car $|\cos(\alpha)| \leq 1$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

d) Vrai, car alors on a $\vec{u} \bullet \vec{v} = \sum_{i=1}^n 0\cdot v_i = 0$.

e) Vrai, car alors on a $0 = \vec{u} \bullet \vec{u} = \sum_{i=1}^n u_i^2$. Comme cette dernière somme de carrés est nulle, cela signifie que chacun des termes de la somme est nul, autrement dit $u_i^2 = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et donc $u_i = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Ainsi $\vec{u} = \vec{0}$.

f) C'est faux si $\lambda < 0$ car la norme d'un vecteur est toujours positive ou nulle.

g) Vrai. Soit $\lambda > 10$ un irrationnel (par exemple, le nombre 101 n'est pas un carré parfait et donc $\sqrt{101}$ est irrationel et strictement plus grand que 10). Le vecteur $\vec{u} = (\lambda; 0; \ldots; 0)$ a pour norme

$$\|\vec{u}\| = \left(\sum_{i=1}^n u_i^2\right)^{1/2} = \left(\lambda^2\right)^{1/2} = \lambda$$

Exercice 15. Notons α l'angle entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

a) On a $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{a} \bullet \vec{b} = -4$, $\|\vec{a}\| = \sqrt{5}$, $\|\vec{b}\| = \sqrt{13}$, $\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|} = \dfrac{-4\sqrt{65}}{65}$ et donc $\alpha \cong 119.74°$.

b) On a $\vec{a} = \begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$, $\vec{a} \bullet \vec{b} = 6$, $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 2\sqrt{5}$, $\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|} = \dfrac{6}{3\cdot 2\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ et donc $\alpha \cong 63.43°$.

c) On a $\vec{a} = \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$, $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$, dans ce cas c'est plus simple car $\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|} = 0$ et donc $\alpha = 90°$.

Exercice 16.

a) On a $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{a} \bullet \vec{b} = -7$, $\|\vec{a}\| = \sqrt{14}$, $\|\vec{b}\| = \sqrt{13}$, $\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|} = \dfrac{-7}{\sqrt{14}\sqrt{13}} = \dfrac{-7\sqrt{182}}{182}$ et donc $\alpha \cong 121.26°$.

b) On a $\vec{a} = \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{a} \bullet \vec{b} = 1$, $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = \sqrt{3}$, $\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|} = \dfrac{1}{3\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{9}$ et donc $\alpha \cong 78.90°$.

c) Dans ce cas le produit scalaire vaut zéro et donc l'angle entre les deux vecteurs est 90°.