

Exercice 1. Pour s'échauffer

Considérons l'équation linéaire d'ordre deux

$$y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0, \quad t \in I \quad (1)$$

avec $b, c : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I . Soient $y_1, y_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$, $y_1, y_2 \in \mathcal{C}^2(I)$ deux solutions de l'EDO (1). Montrer que le Wronskien $W(t) = W[y_1, y_2](t)$ est une solution de l'EDO

$$y'(t) + b(t)y(t) = 0.$$

Correction.

Par un calcul direct, on a

$$\begin{aligned} W'(t) &= y_1'(t)y_2'(t) + y_1(t)y_2''(t) - y_1''(t)y_2(t) - y_1'(t)y_2'(t) \\ &= y_1(t)y_2''(t) - y_1''(t)y_2(t) \\ &= y_1(t)[-b(t)y_2'(t) - c(t)y_2(t)] - [-b(t)y_1'(t) - c(t)y_1(t)]y_2(t) \\ &= -b(t)y_1(t)y_2'(t) + b(t)y_1'(t)y_2(t) \\ &= -b(t)W(t). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$W'(t) + b(t)W(t) = 0$$

Exercice 2. Pour s'échauffer

En utilisant l'exercice précédent, montrer que soit $W(t) = 0$ pour tout $t \in I$, soit $W(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$.

Correction.

Soit B une primitive de b , alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $W(t) = Ce^{-B(t)}$. Comme $e^{-B(t)} > 0$ pour tout $t \in I$, alors soit $C \neq 0$ et $W(t) \neq 0$, soit $C = 0$ et $W(t) = 0$.

Exercice 3. Indépendance linéaire des solutions d'une EDO linéaire d'ordre deux homogène

Sous les mêmes hypothèses des exercices précédents, montrer que y_1 et y_2 sont linéairement indépendants si et seulement si $W(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$.

Indication : Montrer que y_1 et y_2 sont colinéaires si et seulement si il existe $\bar{t} \in I$ tel que $W(\bar{t}) = 0$.

Correction.

- a) On montre que si y_1 et y_2 sont colinéaires, alors il existe $\bar{t} \in I$ tel que $W(\bar{t}) = 0$. Si y_1 et y_2 sont colinéaires, alors il existe des coefficients $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ tels que, pour tout $t \in I$,

$$\alpha y_1(t) + \beta y_2(t) = 0.$$

Si $\alpha \neq 0$ (si $\alpha = 0$, le raisonnement est le même en divisant par $\beta \neq 0$), on a

$$y_1(t) = -\frac{\beta}{\alpha}y_2(t), \quad \forall t \in I.$$

Pour tout $t \in I$, un calcul direct donne

$$W(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) = -\frac{\beta}{\alpha}y_2'(t)y_2(t) + \frac{\beta}{\alpha}y_2'(t)y_2(t) = 0,$$

donc en particulier il existe $\bar{t} \in I$ tel que $W(\bar{t}) = 0$.

b) Supposons qu'il existe un $\bar{t} \in I$ tel que $W(\bar{t}) = 0$, et on veut montrer que y_1 et y_2 sont colinéaires.

Comme $W(\bar{t}) = 0$, la matrice $A = \begin{pmatrix} y_1(\bar{t}) & y_2(\bar{t}) \\ y_1'(\bar{t}) & y_2'(\bar{t}) \end{pmatrix}$ (dont $W(\bar{t})$ représente le déterminant) a un noyau non trivial, i.e. $\exists(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ tel que $A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$. Autrement dit,

$$\alpha y_1(\bar{t}) + \beta y_2(\bar{t}) = 0, \quad \alpha y_1'(\bar{t}) + \beta y_2'(\bar{t}) = 0.$$

Posons $u(t) := \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$. Comme y_1 et y_2 sont solutions de l'EDOL2 homogène (1), par linéarité u l'est aussi. Donc elle satisfait le problème de Cauchy dont la condition initiale est $u(\bar{t}) = u'(\bar{t}) = 0$.

On remarque que la fonction identiquement nulle est aussi solution de ce problème de Cauchy, et par unicité (théorème de Cauchy-Lipschitz/Picard), on en déduit que forcément $u(t) = 0 \forall t \in I$ donc $\alpha y_1(t) + \beta y_2(t) = 0$ pour tout $t \in I$, i.e. y_1 et y_2 sont colinéaires.

Attention. On serait tenté d'utiliser l'exercice 2 pour conclure à partir d'ici la colinéarité de y_1 et y_2 par le fait que si $W(\bar{t}) = 0$, alors $W \equiv 0$ et donc on peut utiliser le raisonnement ci-dessus en tout point. Cependant, les α et β trouvés ci-dessus dépendent de t ! Ce n'est donc pas suffisant.

Exercice 4.

Sous les mêmes hypothèse que dans l'exercice 1, montrer que si l'on a calculé une solution $y_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ de l'EDO

$$y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0, \quad \forall t \in I, \quad (2)$$

avec $y_1(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$, alors la fonction $y_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ solution de l'EDO d'ordre 1

$$y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t) = W(t), \quad (3)$$

où $W(t)$ une solution non nulle de $W'(t) + b(t)W(t) = 0$, est une solution de (2) linéairement indépendante de y_1 .

Correction.

Si y_2 est solution de (3), alors

$$y_2'(t) = \frac{y_1'(t)}{y_1(t)}y_2(t) + \frac{W(t)}{y_1(t)},$$

car $y_1(t) \neq 0$. On a donc

$$\begin{aligned} y_2'' &= \left(\frac{y_1'}{y_1}\right)' y_2 + \frac{y_1'}{y_1} y_2' + \frac{W'y_1 - W y_1'}{y_1^2} \\ &= \frac{y_1'' y_1 - y_1' y_1'}{y_1^2} y_2 + \frac{y_1' y_1'}{y_1 y_1} y_2 + \frac{y_1' W}{y_1 y_1} + \frac{W'y_1 - W y_1'}{y_1^2} \\ &= \frac{y_1''}{y_1} y_2 + \frac{y_1' W}{y_1 y_1} + \frac{W'y_1 - W y_1'}{y_1^2} \\ &= \frac{-b y_1' - c y_1}{y_1} y_2 + \frac{y_1' W}{y_1 y_1} + \frac{W'y_1 - W y_1'}{y_1^2} \\ &= -b \frac{y_1'}{y_1} y_2 - c y_2 + \frac{y_1' W}{y_1 y_1} + \frac{W'y_1 - W y_1'}{y_1^2} \\ &= -b y_2' + b \frac{W}{y_1} - c y_2 + \frac{y_1' W}{y_1 y_1} + \frac{W'y_1 - W y_1'}{y_1^2} \\ &= -b y_2' - c y_2 + b \frac{W}{y_1} + \frac{W y_1'}{y_1^2} + \frac{-b W y_1 - W y_1'}{y_1^2} \\ &= -b y_2' - c_y^2 + b \frac{W}{y_1} - b \frac{W}{y_1} + \frac{W y_1'}{y_1^2} - \frac{W y_1'}{y_1^2} \\ &= -b y_2' - c y_2 \end{aligned}$$

Ainsi y_2 est solution de (2). De plus, comme on a choisi une solution non nulle de $W'(t) + b(t)W(t) = 0$, on a automatiquement par construction que

$$W(y_1, y_2] = W(t) = y_1'(t)y_2(t) - y_1(t)y_2'(t) \neq 0$$

pour tout $t \in I$, et donc les solutions y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes.

Exercice 5. Facultatif

Considérons $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $F = F(t, y, z)$ et $(t_0, y_0, z_0) \in \Sigma = \{(t, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(t, y, z) = 0\}$. Supposons que $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$ et que $\frac{\partial F}{\partial z}(t_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Montrer que l'on peut trouver un voisinage $I \times \Omega \times \Omega'$ de (t_0, y_0, z_0) tel que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} F(t, y(t), y'(t)) = 0, & t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

peut s'écrire comme

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in I, \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

avec $y : I \rightarrow \Omega$, $y' : I \rightarrow \Omega'$ et $f : I \times \Omega \rightarrow \Omega'$.

Remarque : on demande F continûment différentiable sur tout \mathbb{R}^3 pour simplifier l'énoncé et pouvoir appliquer sans soucis le résultat pour tout $(t_0, y_0, z_0) \in \Sigma$ satisfaisant l'hypothèse sur $\frac{\partial F}{\partial z}$, mais dans les faits, il suffirait de le demander dans un voisinage de (t_0, y_0, z_0) (pour un résultat local) ou sur un ouvert contenant Σ (pour un résultat indépendant du point).

Correction.

Comme $\frac{\partial F}{\partial z}(t_0, y_0, z_0) \neq 0$, par le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage (t_0, y_0, z_0) qui peut s'écrire $I \times \Omega \times \Omega'$, avec $t_0 \in I$, $y_0 \in \Omega$, $z_0 \in \Omega'$, et $f : I \times \Omega \rightarrow \Omega'$ tel que $F(t, y, f(t, y)) = 0$, $\forall (t, y) \in I \times \Omega$, autrement dit, dans ce voisinage on a $z = f(t, y)$ et ainsi, si y satisfait $F(t, y(t), y'(t)) = 0$, alors $y'(t) = f(t, y(t))$.