Rappel : Pour deux fonctions $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$, I un intervalle, on définit le Wronskien $W(t) = W[y_1, y_2](t)$ par, pour tout $t \in I$,

$$W(t) = W[y_1, y_2](t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t).$$

Exercice 1. Pour s'échauffer

Considérons l'équation linéaire d'ordre deux

$$y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0, \quad t \in I \tag{1}$$

avec $b, c : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I. Soient $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$, $y_1, y_2 \in \mathcal{C}^2(I)$ deux solutions de l'EDO (1). Montrer que le Wronskien $W(t) = W[y_1, y_2](t)$ est une solution de d'EDO

$$y'(t) + b(t)y(t) = 0.$$

Exercice 2. Pour s'échauffer

En utilisant l'exercice précédent, montrer que soit $W(t) = 0$ pour tout $t \in I$, soit $W(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$.

Exercice 3. Indépendance linéaire des solutions d'une EDO linéaire d'ordre deux homogène

Sous les mêmes hypothèses des exercices précédents, montrer que y_1 et y_2 sont linéairement indépendants si et seulement si $W(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$.
Indication : Montrer que y_1 et y_2 sont colinéaires si et seulement si il existe $\bar{t} \in I$ tel que $W(\bar{t}) = 0$.

Exercice 4.

Sous les mêmes hypothèse que dans l'exercice 1, montrer que si l'on a calculé une solution $y_1 : I \to \mathbb{R}$ de l'EDO

$$y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0, \quad \forall t \in I, \tag{2}$$

avec $y_1(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$, alors la fonction $y_2 : I \to \mathbb{R}$ solution de l'EDO d'ordre 1

$$y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t) = W(t), \tag{3}$$

où $W(t)$ une solution non nulle de $W'(t) + b(t)W(t) = 0$, est une solution de (2) linéairement indépendante de y_1.

Exercice 5. Facultatif

Considérons $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction $F = F(t, y, z)$ et $(t_0, y_0, z_0) \in \Sigma = \{(t, y, z) \in \mathbb{R}^3 | F(t, y, z) = 0\}$. Supposons que $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$ et que $\dfrac{\partial F}{\partial z}(t_0, y_0, z_0) \neq 0$.
Montrer que l'on peut trouver un voisinage $I \times \Omega \times \Omega'$ de (t_0, y_0, z_0) tel que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} F(t, y(t), y'(t)) = 0, \quad t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

peut s'écrire comme

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in I, \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

avec $y : I \to \Omega$, $y' : I \to \Omega'$ et $f : I \times \Omega \to \Omega'$.

Remarque : on demande F continûment différentiable sur tout $\mathbb{R}^3$ pour simpplifier l'énoncé et pouvoir appliquer sans soucis le résultat pour tout $(t_0, y_0, z_0) \in \Sigma$ satisfaisant l'hypothèse sur $\frac{\partial F}{\partial z}$, mais dans les faits, il suffiraitt de le demander dans un voisinage de (t_0, y_0, z_0) (pour un résultat local) ou sur un ouvert contenant Σ (pour un résultat indépendant du point).