Leonid Monin
Léo Navarro Chafloque

EPFL, semestre de printemps 2026
Rings and fields

Exercices – Semaine 13

Exercice 1.
Dans les cas suivants, montrez que $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ est le corps de décomposition d'un polynôme, puis calculez $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha, \beta)/\mathbb{Q})$, et calculez le polynôme minimal de $\alpha, \alpha + \beta, \alpha \cdot \beta$ et α^{-1}. Pour calculer les polynômes minimaux, on calculera l'orbite de ces éléments par G.

1. $\alpha = \sqrt{3}, \beta = \sqrt{7}$
2. $\alpha = e^{(i\pi/3)}, \beta = -1$
3. $\alpha = e^{(i\pi/3)}, \beta = i$
4. $\alpha = e^{(i\pi/6)}, \beta = i$.

Exercice 2.
Soit $K \subseteq L \subseteq E$ une extension algébrique tel que $K \subseteq L$ et $L \subseteq E$ sont Galois. Montrer que $K \subseteq E$ n'est pas forcément Galois.
Indication. Envisager les extensions $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{1+\sqrt{2}})$ ou $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$.

Exercice 3 (Correspondance de Galois)**.**
Dans chacun des cas suivantes déterminer le groupe de Galois de l'extension donnée, déterminer tous ses sous-groupes et tous les sous-corps de points fixes correspondants.

1. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{7})$.
2. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.
3. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$.
4. $\mathbb{Q} \subset E$ où E est le corps de décomposition de $t^4 - 2t^2 - 1 \in \mathbb{Q}[t]$.

Indication. Ce corps de décomposition est de degré 8 et on montrera qu'il s'agit de $\mathbb{Q}(\sqrt{1+\sqrt{2}}, i)$. On explicitera alors un automorphisme d'ordre 2 et un autre d'ordre 4 qui ne commutent pas entre eux, si bien que le groupe de Galois est le groupe dihédral d'ordre 8.

Exercice 4.
Soit $K \subseteq L = K(\alpha)$ une extension simple de degré 2 de corps de caractéristique différente de 2.

1. Soit $m_{\alpha,K} = x^2 + bx + c$, où $b, c \in K$. Démontrez que la formule quadratique est valide ici. Cela veut dire les deux racines de $m_{\alpha,K}$ sont $\frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}$ et $\frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}$, où $\beta = \sqrt{b^2 - 4c} \in L$ est un quelconque élément tel que $\beta^2 = b^2 - 4c$. Cela inclut l'affirmation que tel β n'existe pas dans K. Concluez que L est une extension par une racine (deuxième) d'un élément adéquat de K.
2. Démontrez que $K \subseteq L$ est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-galoisienne .
3. Soit $\mathbb{Q} = K \subseteq L$ une extension de corps $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-galoisienne. Démontrez que il existe des entiers rationnels a, $b \neq 0$ et d tel que $L = \mathbb{Q}\left(\sqrt{a + b\sqrt{d}}\right)$ et $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{a + b\sqrt{d}} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{d})$.
4. Considérons a, $b \neq 0$, $d \in \mathbb{Q}$ tel que $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$ et $\alpha = \sqrt{a + b\sqrt{d}} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Démontrez que l'extension $K = \mathbb{Q} \subseteq L = \mathbb{Q}(\alpha)$ est $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-galoisienne si et seulement si $\sqrt{a - b\sqrt{d}} \in L$ et $\lambda = a^2 - b^2 d$ n'est pas un carré dans $\mathbb{Q}$.

5. Montrez que $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}\big(\sqrt{2+\sqrt{2}}\big)$ est $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-galoisienne.

Exercice 5.
Soit $K \subseteq L$ une extension Q_8-galoisienne (où Q_8 est le groupe des quaternions), et soit $f \in K[x]$ un polynôme irréductible tel que L est un corps de décomposition de f. Démontrez que $\deg f = 8$.