Série 32

Exercice 1.

a) Soit le vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de V_2. Calcule sa projection orthogonale sur la droite Ox, puis l'angle, en degrés(!), entre ces deux vecteurs.

b) Soit le vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de V_3. Détermine sa projection orthogonale sur le plan Oxy, puis l'angle, en degrés(!), entre cette projection et $\vec{a}$. Au vu de ton résultat de **a)**, cette réponse est-elle surprenante ?

Exercice 2. On considère les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 7 \\ x \\ y \end{pmatrix}$ de V_3. Calcule les valeurs de x et y de sorte que $\vec{w}$ soit orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exercice 3. La droite dans le plan. Calcule une équation cartésienne de chacune des droites suivantes. Simplifie à chaque fois l'expression au maximum !

a) La droite passant par $A = (3; 4)$ et de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

b) La droite passant par $A = (3; 4)$ et $B = (1; 0)$.

c) La droite passant par $A = (-5; 3)$ et de pente nulle.

d) La droite passant par $A = (4; 7)$ et perpendiculaire à une droite horizontale.

Exercice 4. Intersection de droites. Détermine l'intersection des paires de droites suivantes :

a) les droites d'équations $2x + 3y + 4 = 0$ et $-x - \frac{3}{2}y + 1 = 0$;

b) les droites d'équations $x + 2y + 3 = 0$ et $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

c) les droites d'équations $2x + 3y + 1 = 0$ et $2x - 3y + 1 = 0$;

d) la droite passant par $A = (-2; -1)$ et $B = (4; 3)$ et celle passant par $C = (1; 3)$ et $D = (5; 0)$.

Exercice 5. Position du barycentre par le calcul vectoriel.
On considère trois points A, B, C non alignés de $\mathbb{R}^n$.

a) En utilisant A comme origine du repère, donne des équations paramétriques vectorielles des médianes du triangle ABC issues de B et de C.

b) Soit X un point de la médiane issue de B. Exprime $\overrightarrow{AX}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis fais de même avec un point X de la médiane issue de C.

c) Calcule le point d'intersection des deux médianes, et déduis-en que les médianes d'un triangle s'intersectent en un point situé aux $2/3$ de chaque médiane depuis le sommet dont elles sont issues.

Exercice 6. La pente d'une droite. Détermine la pente de la droite sachant que :

a) elle passe par $(-5; 4)$ et son vecteur directeur est $-3\vec{e_1} + \vec{e_2}$;

b) elle passe par $(7; 2)$ et $(-5; 8)$;

c) elle est verticale ;

d) elle est parallèle à l'axe Ox ;

e) c'est la droite "diagonale" $x - y = 0$.

Exercice 7. Pour un $t \in \mathbb{R}$ donné, on considère les droites g et h du plan :

$$(g) : (t+1)x + ty + t - \tfrac{9}{4} = 0 \qquad \text{et} \qquad (h) : (5t+1)x + 4ty + t = 0$$

a) Donne toutes les valeurs de t telles que g et h sont parallèles.

b) Donne toutes les valeurs de t telles que g et h sont confondues.

c) Donne toutes les valeurs de t telles que g et h sont perpendiculaires.

Indication. Utilise les vecteurs normaux : avec les pentes, tu risques de rencontrer des problèmes.

Exercice 8. Montre que l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est aigu si et seulement si le produit scalaire $\vec{u} \bullet \vec{v}$ est strictement positif.

Exercice 9. On donne l'équation de deux côtés d'un rectangle $-2x+y = 11$, $2x-y = -1$ et l'équation d'une diagonale $y = 3$. Trouve les sommets de ce rectangle.

Exercice 10. Projection orthogonale. Détermine la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$ dans les cas suivants :

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$;

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 111 \end{pmatrix}$;

c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Exercice 11. Calcule la distance du point $(0; 5)$ à la droite $3x + 4y + 5 = 0$, puis celle du point $(5; 4)$ à la droite horizontale $3y + 1 = 0$. Pour ce deuxième calcul, tu peux appliquer la formule du cours et aussi trouver une manière plus astucieuse et moins calculatoire.

Exercice 12. D'un rectangle on connaît le sommet $A = (-2; 1)$ ainsi que les équations des droites support de deux côtés non parallèles : $3x - 2y - 5 = 0$ et $4x + ay + 14 = 0$. Avec un minimum de calculs, trouve l'aire du rectangle.

Exercice 13. Autour des hauteurs d'un triangle. Calcule les coordonnées des pieds des hauteurs du triangle dont les sommets sont $A = (-4; -1)$, $B = (4; 3)$ et $C = (-1; 2)$. Calcule ensuite les coordonnées de l'orthocentre H du triangle.
Vérifie que tes résultats sont raisonnables en effectuant la construction sur une figure.

Remarque. Pour trouver les pieds des hauteurs, une méthode efficace est d'utiliser la projection orthogonale d'un vecteur sur un autre.

Note qu'il n'est pas absolument nécessaire de trouver les pieds des hauteurs pour déterminer l'orthocentre d'un triangle. Sauras-tu trouver cette méthode ?

Exercice 14. On considère les points $A = (-3; -1)$, $C = (7; 4)$ et $D = (0; 3)$.

a) Représente graphiquement tous les points B tels que $ABCD$ forme un trapèze rectangle en B.

b) Détermine avec un minimum de calcul les coordonnées du point B qui se trouve dans le 1^{er} quadrant.

Exercice 15. Dans $\mathbb{R}^2$ on considère les points $A = (-1; 1)$, $B = (1; 1)$, $C = (-1; -1)$ et un point M quelconque de la droite BC.

a) Donne les coordonnées du point M en fonction d'un paramètre réel m (par exemple l'ordonnée).

b) Détermine les projections H et K de M sur les droites AB et AC. Aide-toi d'une figure d'étude.

c) Montre que les points O, A, M, K et H font partie d'un même cercle. Calcule les coordonnées de son centre I.

d) Montre que les droites OI et HK sont perpendiculaires.