Exercice 1.

a) On a

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc \qquad \text{et} \qquad \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = aei + cdh + bfg - ceg - afh - bdi$$

b) Pour $\vec{u}, \vec{v} \in V_2$, on a

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont linéairement indépendants} \iff (x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} = \vec{0} \implies x = y = 0)$$

En composantes, l'équation $x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} = \vec{0}$ s'écrit comme le système suivant :

$$\begin{cases} ax + cy = 0 \\ bx + dy = 0 \end{cases}$$

Par la méthode de Cramer pour la résolution des systèmes linéaires, un tel système possède une unique solution (qui sera forcément $x = 0$ et $y = 0$) si et seulement si $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \neq 0$.

Par une proposition du cours, deux vecteurs de V_2 forment une base si et seulement si ils sont linéairement indépendants, ce qui nous permet de conclure.

c) Par le même raisonnement que ci-dessus, les trois vecteurs de V_3 sont linéairement indépendants si et seulement si pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, le système

$$\begin{cases} ax + dy + gz = 0 \\ bx + ey + hz = 0 \\ cx + fy + iz = 0 \end{cases}$$

admet une unique solution (qui sera $x = y = z = 0$). Si le déterminant D associé au système est non nul, les résultats sur la méthode de Cramer impliquent qu'il existe bien une unique solution, et les vecteurs sont linéairement indépendants.

Il faut encore montrer que si $D = 0$, les trois vecteurs ne sont pas linéairement indépendants (le résultat de Cramer ne nous permet pas de conclure si tous les déterminants D, D_x, D_y et D_z sont nuls). Supposons donc que $D = 0$ (on observe par ailleurs que $D_x = D_y = D_z = 0$ pour le système ci-dessus), et montrons que les vecteurs ne sont pas linéairement indépendants ; pour cela, nous allons résoudre le système d'équations par la méthode de Gauss.

- Tout d'abord, si $\vec{u} = \vec{0}$, alors la solution $x = 1$, $y = z = 0$ du système montre que les vecteurs ne sont pas linéairement indépendants.
- On peut donc supposer $\vec{u} \neq \vec{0}$, et par exemple $a \neq 0$ (si $a = 0$ et $b \neq 0$, le raisonnement est similaire, de même si $a = b = 0$ et $c \neq 0$). Après une étape de Gauss, on se retrouve avec le système

$$\begin{cases} x + d'y + g'z = 0 \\ \qquad e'y + h'z = 0 \\ \qquad f'y + i'z = 0 \end{cases}$$

  Si $e' = f' = 0$, alors soit $d' = 0$, auquel cas la solution $y = 1$ et $x = z = 0$ est une solution non nulle du sysème, soit $d' \neq 0$, auquel cas $x = -d'$, $y = 1$ et $z = 0$ est une solution non nulle du système. Dans les deux cas, les vecteurs ne sont pas linéairement indépendants.
- On peut maintenant supposer $e' \neq 0$ (car si $e' = 0$, on a $f' \neq 0$ et le raisonnement est similaire), et l'étape suivante de Gauss donne le système

$$\begin{cases} x + d'y + g'z = 0 \\ \qquad y + h''z = 0 \\ \qquad\quad i''z = 0 \end{cases}$$

Il est nécessaire maintenant de revenir au détail de Gauss(!) : nous sommes dans le cas où $a \neq 0$ et $e' = e - \frac{bd}{a} \neq 0$; on a

$$i'' = i' - \frac{f'h'}{e'} = \left(i - \frac{cg}{a}\right) - \frac{\left(f - \frac{cd}{a}\right)\left(h - \frac{bg}{a}\right)}{e - \frac{bd}{a}} = \frac{(ia - cg)}{a} - \frac{(af - cd)}{a} \cdot \frac{(ha - bg)}{a} \cdot \frac{a}{(ea - bd)}$$
$$= \frac{a^2ei - abdi - aceg + bcdg - a^2fh + abfg + acdh - bcdg}{a(ea - bd)} = \frac{aei - bdi - ceg - afh + bfg + cdh}{ea - bd}$$

dont le numérateur est exactement D — qui est nul par hypothèse. Dans ce cas, $z = 1$, $y = -h''$ et $x = d'h'' - g'$ est une solution non nulle du système.

Ceci montre que les trois vecteurs sont linéairement indépendants si et seulement si le déterminant principal du système est non nul (avec plus d'outils théoriques, cette démonstration peut être grandement simplifiée !). Par une proposition du cours, 3 vecteurs de V_3 forment une base si et seulement si ils sont linéairement indépendants, ce qui nous permet de conclure.

Exercice 2.

a) Par l'exercice précédent, il suffit de montrer que le déterminant formé par les 3 vecteurs est nul. On calcule

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

et donc $\mathcal{B}$ est bien une base.

b) Pour simplifier les calculs, résolvons d'abord le système général

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

par Cramer. Les déterminants associés sont $D = -2$, calculé au point précédent, ainsi que

$$D_x = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = -x - y + z, \ D_y = \begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 1 & y & 1 \\ 0 & z & 1 \end{vmatrix} = y - z - x, \ D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = -y - z + x$$

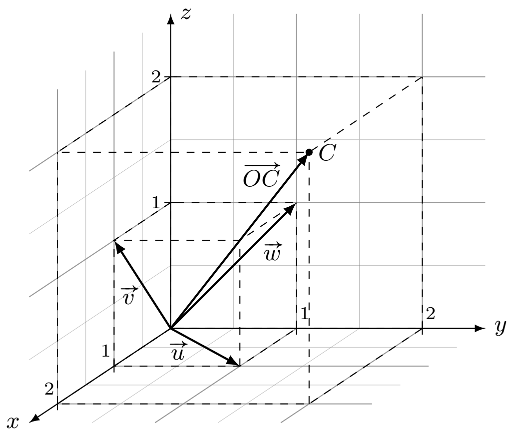
Les coefficients cherchés sont donc

$$\alpha = \frac{-x - y + z}{-2}, \ \beta = \frac{y - z - x}{-2}, \ \alpha = \frac{-y - z + x}{-2}$$

et on obtient directement les composantes des vecteurs dans la base $\mathcal{B}$:

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} (-5 + 0 + 0)/-2 \\ (0 - 0 - 5)/-2 \\ (-0 - 0 + 5)/-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 5/2 \\ -5/2 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} (-0 - 0 + 7)/-2 \\ (0 - 7 - 0)/-2 \\ (-0 - 7 + 0)/-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/2 \\ 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix},$$
$$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} (-2 - 2 + 2)/-2 \\ (2 - 2 - 2)/-2 \\ (-2 - 2 + 2)/-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} (-1 - 1 + 1)/-2 \\ (1 - 1 - 1)/-2 \\ (-1 - 1 + 1)/-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$
$$\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} (-1 - 2 + 3)/-2 \\ (2 - 3 - 1)/-2 \\ (-2 - 3 + 1)/-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

c)



Exercice 3. Il faut résoudre par la méthode de ton choix le système $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 52 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -16 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}$.
La solution est $\alpha = 4$, $\beta = 5$, $\gamma = 2$.

Exercice 4.
$$\begin{aligned} \tfrac{3}{4}\overrightarrow{b} - \tfrac{1}{2}\overrightarrow{a} &= \tfrac{9}{10}\left(\tfrac{1}{12}\overrightarrow{x} + \tfrac{5}{3}\overrightarrow{b}\right) - 2\overrightarrow{a} && \mid \cdot 120 \\ 90\overrightarrow{b} - 60\overrightarrow{a} &= 9\overrightarrow{x} + 180\overrightarrow{b} - 240\overrightarrow{a} \\ 9\overrightarrow{x} &= 180\overrightarrow{a} - 90\overrightarrow{b} && \mid \cdot \tfrac{1}{9} \\ \overrightarrow{x} &= 20\overrightarrow{a} - 10\overrightarrow{b} \end{aligned}$$
et donc $\overrightarrow{x} = 20 \cdot \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -16 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 10 \cdot \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 18 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -98 \\ 20 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. Par un exercice précédent, ils sont colinéaires si et seulement si le déterminant $\begin{vmatrix} m & 3 \\ 2m-1 & m+2 \end{vmatrix}$ est nul. Autrement dit si et seulement si $m^2 + 2m - 6m + 3 = 0 \iff m = 1$ ou $m = 3$.

Exercice 6. De même, les vecteurs sont coplanaires

$$\iff \begin{vmatrix} 3 & 2 & m \\ -5 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 2m+3 \end{vmatrix} = -2 - 20m + 12 + 20m + 30 = 0 \iff 40 = 0$$

Autrement dit : ces vecteurs ne sont jamais coplanaires.

Exercice 7. De même qu'à l'exercice précédent, les vecteurs sont coplanaires

$$\iff \begin{vmatrix} 9m & 0 & 8 \\ 0 & 1 & m^2 \\ 2 & 0 & m \end{vmatrix} = 9m^2 - 16 = 0 \iff (3m-4)(3m+4) = 0 \iff m = \pm\frac{4}{3}\ .$$

Exercice 8. Calculons la norme du vecteur $\frac{1}{||\overrightarrow{u}||} \cdot \overrightarrow{u}$:

$$\left\|\frac{1}{||\overrightarrow{u}||} \cdot \overrightarrow{u}\right\| = \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{||\overrightarrow{u}||}\right)^2\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{||\overrightarrow{u}||^2}\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{||\overrightarrow{u}||^2} \cdot ||\overrightarrow{u}||^2\right)^{1/2} = 1$$

De plus le scalaire $\dfrac{1}{||\overrightarrow{u}||}$ est un nombre réel positif, ce qui signifie que $\dfrac{1}{||\overrightarrow{u}||} \cdot \overrightarrow{u}$ est un vecteur de même sens et même direction que $\overrightarrow{u}$.
On calcule $\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ et donc le vecteur $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est le vecteur cherché. De même, on calcule $\left\|\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{2^2 + 6^2 + 9^2} = \sqrt{121} = 11$ et donc $\dfrac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/11 \\ 6/11 \\ 9/11 \end{pmatrix}$ est le vecteur cherché.

Exercice 9.

a) Pour montrer que P_2 est un espace vectoriel, il faut d'abord s'assurer que l'addition de deux polynômes de degré plus petit ou égal à deux donne un polynôme de degré plus petit ou égal à deux, ce qui est vrai, et que la multiplication d'un polynôme de degré plus petit ou égal à deux par un nombre réel est encore un polynôme de degré plus petit ou égal à deux, ce qui est vrai aussi. Ceci permet de définir les deux opérations :

$$+ : \ P_2 \times P_2 \to P_2 \qquad \text{et} \qquad \cdot : \ \mathbb{R} \times P_2 \to P_2$$

(nous venons de nous assurer que l'ensemble d'arrivée est bien P_2). Comme le polynôme nul est aussi dans P_2, on se convainc que les 5 conditions (**i)** à **v)** du cours) restantes à vérifier pour que P_2 soit un espace vectoriel sont immédiatement remplies puisqu'elles sont vraies pour n'importe quels polynômes (de degré 2 ou moins... ou pas !).

b) Les trois polynômes sont linéairement indépendants : en effet, si $a \cdot x^2 + b \cdot x + c \cdot 1 = 0$, alors par définition du polynôme nul dans $\mathbb{R}[x]$, on a bien $a = b = c = 0$. Montrons que ces polynômes forment un système de générateurs. Soit $ax^2 + bx + c$ un polynôme quelconque de $\mathbb{R}[x]$ de degré ≤ 2. Alors clairement on a $ax^2 + bx + c = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \cdot 1$, ce qui prouve que la liste donnée forme un système de générateurs.

c) En effet les polynômes sont linéairement dépendants : $x = 1/2(1 + x) - 1/2(1 - x)$.

d) Montrons qu'ils sont linéairement indépendants. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$a(1 + x) + b(1 + x + x^2) + c = 0$

$\iff a + b + c + (a + b)x + bx^2 = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$

$\iff \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + b = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

$\iff a = b = c = 0.$

Ce qui prouve que ces trois polynômes sont linéairement indépendants.

Montrons qu'ils forment un système de générateurs. Soit $ax^2 + bx + c$ un polynôme quelconque de $\mathbb{R}[x]$ de degré ≤ 2. Alors

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (1 + x + x^2) - (a - b) \cdot (1 + x) - (b - c) \cdot 1,$$

ce qui prouve que la liste donnée forme un système de générateurs. Ainsi, comme la liste donnée et linéairement indépendante et forme un système de générateurs, on en déduit que c'est une base de $\mathbb{R}[x]$ avec degré ≤ 2.

Exercice 10.

a) Il s'agit bien d'une base de V_2 car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

b) Dans chaque cas, nous devons résoudre le système $\begin{cases} \alpha - \beta = x \\ \alpha + \beta = y \end{cases}$ avec un membre de droite à chaque fois différent. En effet, nous devons trouver les scalaires α et β tels que $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. C'est le cadre idéal pour appliquer la méthode de Cramer que nous avons vu plus tôt dans l'année. Pour ce faire, nous devons calculer les déterminants

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \ \begin{vmatrix} x & -1 \\ y & 1 \end{vmatrix} = x + y, \ \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & y \end{vmatrix} = y - x.$$

Et ainsi le vecteur $\overrightarrow{OX}$ s'écrit $\begin{pmatrix} (x + y)/2 \\ (y - x)/2 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$. On peut calculer alors successivement :

$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} (3 - 1)/2 \\ (-1 - 3)/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$; $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} (-3 + 0)/2 \\ (0 + 3)/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$; $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} (10 + 10)/2 \\ (10 - 10)/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$; $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} (-5 + 5)/2 \\ (5 + 5)/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$;

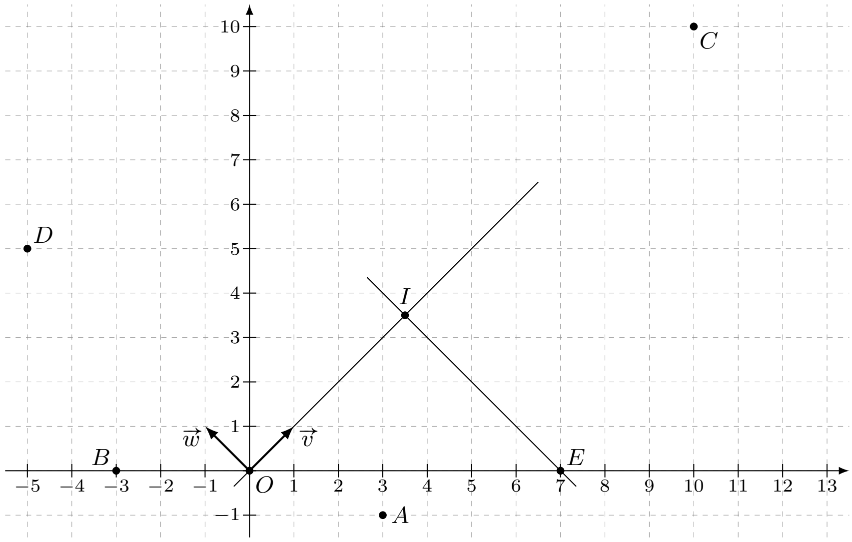
$\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} (7 + 0)/2 \\ (0 - 7)/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ -7/2 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

c) Par exemple, voici la construction pour le point E.

- **i)** Tracer la droite passant par O et de direction $\vec{v}$.
- **ii)** Tracer la parallèle à $\vec{w}$ par E.
- **iii)** Nommer I l'intersection des deux droites obtenues.

iv) Reporter avec le compas la longueur du vecteur $\vec{v}$ sur la droite OI : compter combien de fois on peut le reporter entre O et I, ce nombre nous donne la première composante de $\overrightarrow{OE}$ dans la base $\mathcal{B}$, soit 3.5.

v) Faire de même avec le vecteur $\vec{w}$ de I à E : il y apparaît également 3.5 fois mais dans le sens opposé, ainsi la deuxième composante de $\overrightarrow{OE}$ dans la base $\mathcal{B}$ est de -3.5.



Exercice 11. Les trois points sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Or on a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \neq \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \overrightarrow{AC}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et donc les vecteurs ne sont pas colinéaires et les points ne sont pas alignés.

Par le même raisonnement les points D, E et F sont alignés car $\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} -4 \\ 28 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -14 \end{pmatrix} = -2 \cdot \overrightarrow{DE}$.

Exercice 12. Les trois points sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AP}$ sont colinéaires. Mais on a

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -22 \\ -20 \end{pmatrix} \neq \alpha \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -18 \\ -15 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \overrightarrow{AP}$$

quelle que soit la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, et donc les trois points ne sont pas alignés. Le rapport de section $(AB; P)$ n'est donc pas défini.

Exercice 13. Le point D est tel que $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}$. Et donc le sommet D cherché est $(-8; 4)$.