

Exercice 1. Pour s'échauffer

Soit $(A_k)_{k=0}^\infty \subset \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ une suite de matrices. Montrer que si la série $\sum_{k=0}^\infty \|A_k\|_F$ converge, alors la série $\sum_{k=0}^\infty A_k$ converge.

Correction.

Montrons que la suite des sommes partielles est de Cauchy. Notons $S_K = \sum_{k=0}^K A_k$. On a

$$\|S_{K+m} - S_K\|_F = \left\| \sum_{k=K+1}^{K+m} A_k \right\|_F \leq \sum_{k=K+1}^{K+m} \|A_k\|_F.$$

Or comme la série $\sum_{k=0}^\infty \|A_k\|_F$ converge, la suite des sommes partielles est de Cauchy et donc pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $\bar{K} \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall K \geq \bar{K}, \quad \forall m \geq 0, \quad \sum_{k=K+1}^{K+m} \|A_k\|_F < \varepsilon.$$

Par conséquent pour tout $K \geq \bar{K}$ et $m \geq 0$, on a bien

$$\|S_{K+m} - S_K\|_F \leq \sum_{k=K+1}^{K+m} \|A_k\|_F < \varepsilon.$$

La suite des sommes partielles étant de Cauchy, elle converge et donc $\sum_{k=0}^\infty A_k$ converge.

Exercice 2. Exponentielle de matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Montrer que la série $\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} A^k$, avec la convention $A^0 = I$, converge. On définit alors l'exponentielle de la matrice A comme la matrice

$$e^A = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} A^k.$$

Correction.

Observons que

$$\sum_{k=0}^\infty \left\| \frac{1}{k!} A^k \right\|_F = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} \|A^k\|_F \leq \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} \|A\|_F^k = e^{\|A\|_F}.$$

Ainsi $\sum_{k=0}^\infty \left\| \frac{1}{k!} A^k \right\|_F$ converge, donc par le résultat de l'exercice précédent, $\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} A^k$ converge.

Exercice 3. Dérivée de l'exponentielle d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, on définit, pour tout $t \in \mathbb{R}$ la fonction "exponentielle de matrice" par

$$\begin{aligned} E : \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \\ t &\mapsto E(t) = e^{At} \end{aligned}$$

Montrer que

$$E'(t) = AE(t).$$

Indication : On peut utiliser, sans preuve, le résultat suivant. Si $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ commutent (c'est-à-dire $AB = BA$), alors

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

Correction.

Calculons $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h}$. Comme tA et hA commutent, on peut factoriser cette expression

$$\frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} = e^{At} \frac{e^{Ah} - I}{h}.$$

Il suffit alors de montrer que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{Ah} - I}{h} = A$. On écrit d'abord

$$e^{Ah} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (Ah)^k = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k}{k!} A^k.$$

Comme A commute avec toutes les puissances de A , on peut écrire

$$\frac{e^{Ah} - I}{h} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} h^{k-1} A^k = A + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} h^{k-1} A^k = A \left(I + hA \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A^{k-2}}{k!} h^{k-2} \right). \quad (1)$$

On observe que

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} h^{k-2} A^{k-2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(Ah)^j}{(j+2)!},$$

or

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\|Ah\|_F^j}{(j+2)!} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \|Ah\|_F^j = e^{\|Ah\|_F},$$

donc $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(Ah)^j}{(j+2)!}$ converge vers une matrice $B \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ et $\|B\|_F \leq e^{\|A\|_F}$. Par conséquent,

$$\left\| hA \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} h^{k-2} A^{k-2} \right\|_F \leq |h| \|A\|_F \|B\|_F \leq |h| \|A\|_F e^{\|A\|_F} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

d'où,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{Ah} - I}{h} = A + \lim_{h \rightarrow 0} hA \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} h^{k-2} A^{k-2} = A.$$

Exercice 4.

Soit $A : I \rightarrow \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ une fonction matricielle dérivable sur I et $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Soit $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ défini par $y(t) = A(t)y_0$. Montrer que $y'(t) = A'(t)y_0$.

Correction.

La dérivée d'une fonction vectorielle est donnée par $y'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h}$. On a alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(t+h)y_0 - A(t)y_0}{h} = \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(t+h) - A(t)}{h} \right) y_0 = A'(t)y_0.$$

Exercice 5. Système linéaire homogène d'EDO

Soit $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz implique qu'il existe une unique solution $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ du système d'EDO

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t), \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

Vérifier que cette solution est donnée par $y(t) = e^{At}y_0$.

Correction.

On a bien que $y(0) = e^{A0}y_0 = y_0$ et $y'(t) = (e^{At})'y_0 = Ae^{At}y_0 = Ay(t)$.

Exercice 6. Exponentielle d'une matrice 2×2 , cas diagonalisable

a) Soit $D \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ une matrice diagonale de la forme

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Montrer que

$$e^D = \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^\beta \end{pmatrix}.$$

b) Dédurre du point précédent que si A est diagonalisable dans \mathbb{R} , c'est-à-dire qu'il existe $P \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ telle que A s'écrit comme

$$A = PDP^{-1}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

alors pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{At} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Correction.

a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $D^k = \begin{pmatrix} \alpha^k & 0 \\ 0 & \beta^k \end{pmatrix}$. D'où

$$e^D = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} \alpha^k & 0 \\ 0 & \beta^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \alpha^k & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \beta^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^\beta \end{pmatrix}.$$

b) Pour $k \in \mathbb{N}$, on a

$$(At)^k = \underbrace{(PDtP^{-1})(PDtP^{-1}) \dots (PDtP^{-1})}_{=I} = P(Dt)^k P^{-1}$$

D'où

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (At)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} P(Dt)^k P^{-1} = P \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (Dt)^k \right) P^{-1} = P e^{Dt} P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} P^{-1},$$

car $Dt = \begin{pmatrix} \lambda_1 t & 0 \\ 0 & \lambda_2 t \end{pmatrix}$ est diagonale.

Exercice 7. Exponentielle d'une matrice 2×2 , cas non diagonalisable avec une seule valeur propre réelle de multiplicité géométrique une

a) Soit $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ une matrice sous forme de Jordan

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Montrer par récurrence que, pour tout $k \geq 1$,

$$A^k = \begin{pmatrix} \alpha^k & k\alpha^{k-1} \\ 0 & \alpha^k \end{pmatrix}$$

et en déduire que

$$e^A = \begin{pmatrix} e^\alpha & e^\alpha \\ 0 & e^\alpha \end{pmatrix}.$$

b) Soit $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ une matrice sous forme de Jordan

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Montrer par récurrence que, pour tout $k \geq 1$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$(At)^k = \begin{pmatrix} t^k \alpha^k & kt^k \alpha^{k-1} \\ 0 & t^k \alpha^k \end{pmatrix}$$

et en déduire que

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} & t e^{\alpha t} \\ 0 & e^{\alpha t} \end{pmatrix}.$$

c) Supposons que $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ possède deux valeurs propres réelles confondues de multiplicité géométrique une, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \mathcal{M}_{2 \times 2}$ inversible telle que $A = PJP^{-1}$, où $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ où λ est la valeur propre. Déduire du point précédent que

$$e^{At} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Correction.

a) Montrons la formule par récurrence. Pour $k = 1$, on a directement

$$A^1 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^1 & 1\alpha^{1-1} \\ 0 & \alpha^1 \end{pmatrix}.$$

Pour $k \geq 1$ fixé, supposons que

$$A^k = \begin{pmatrix} \alpha^k & k\alpha^{k-1} \\ 0 & \alpha^k \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$A^{k+1} = A^k A = \begin{pmatrix} \alpha^k & k\alpha^{k-1} \\ 0 & \alpha^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^{k+1} & \alpha^k + k\alpha^k \\ 0 & \alpha^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^{k+1} & (k+1)\alpha^k \\ 0 & \alpha^{k+1} \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} e^A &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \alpha^k & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} k\alpha^{k-1} \\ 0 & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \alpha^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^{k-1}}{(k-1)!} \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^\alpha & e^\alpha \\ 0 & e^\alpha \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) On a directement

$$(At)^k = t^k A^k = t^k \begin{pmatrix} \alpha^k & k\alpha^{k-1} \\ 0 & \alpha^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^k \alpha^k & kt^k \alpha^{k-1} \\ 0 & t^k \alpha^k \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (At)^k = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (tA)^k \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (t\alpha)^k & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} k(t\alpha)^{k-1} \\ 0 & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (t\alpha)^k \end{pmatrix} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} t^k \alpha^k & kt^k \alpha^{k-1} \\ 0 & t^k \alpha^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\alpha)^k}{k!} & t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(t\alpha)^{k-1}}{(k-1)!} \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\alpha)^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t\alpha} & te^{t\alpha} \\ 0 & e^{t\alpha} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c)

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (At)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} P(Jt)^k P^{-1} = P e^{Jt} P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} P^{-1}. \quad (2)$$

Exercice 8. Exponentielle de matrice, cas diagonalisable avec valeurs propres complexes conjuguées

Si $B \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ est diagonale, *i.e.*

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C},$$

on peut montrer que $e^B = \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^\beta \end{pmatrix}$ de la même manière que dans l'exercice 6. Soit à présent $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ telle que A possède deux valeurs propres complexes conjuguées $\lambda_{\pm} = a \pm ib$, $a, b \in \mathbb{R}$,

$b \neq 0$. On peut écrire $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} z & \bar{z} \\ w & \bar{w} \end{pmatrix}$, inversible, $z, w \in \mathbb{C}$.
Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{At} = Q \begin{pmatrix} e^{at} \cos(bt) & -e^{at} \sin(bt) \\ e^{at} \sin(bt) & e^{at} \cos(bt) \end{pmatrix} Q^{-1},$$

où $Q \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ est donnée par

$$Q = \begin{pmatrix} \operatorname{Im}(z) & \operatorname{Re}(z) \\ \operatorname{Im}(w) & \operatorname{Re}(w) \end{pmatrix}.$$

Correction.

On a

$$e^{At} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_+ t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_- t} \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $e^{\lambda_{\pm} t} = e^{(a \pm ib)t} = e^{at}(\cos(bt) \pm i \sin(bt))$. Écrivons

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \begin{pmatrix} \bar{w} & -\bar{z} \\ -w & z \end{pmatrix}.$$

où

$$\det P = z\bar{w} - \bar{z}w = 2i \operatorname{Im}(z\bar{w}).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P \begin{pmatrix} e^{\lambda_+ t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_- t} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} z & \bar{z} \\ w & \bar{w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_+ t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_- t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ze^{\lambda_+ t} & \bar{z}e^{\lambda_- t} \\ we^{\lambda_+ t} & \bar{w}e^{\lambda_- t} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow P \begin{pmatrix} e^{\lambda_+ t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_- t} \end{pmatrix} P^{-1} &= \begin{pmatrix} ze^{\lambda_+ t} & \bar{z}e^{\lambda_- t} \\ we^{\lambda_+ t} & \bar{w}e^{\lambda_- t} \end{pmatrix} \frac{1}{z\bar{w} - \bar{z}w} \begin{pmatrix} \bar{w} & -\bar{z} \\ -w & z \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{z\bar{w} - \bar{z}w} \begin{pmatrix} z\bar{w}e^{\lambda_+ t} - \bar{z}we^{\lambda_- t} & -|z|^2 e^{\lambda_+ t} + |z|^2 e^{\lambda_- t} \\ |w|^2 e^{\lambda_+ t} - |w|^2 e^{\lambda_- t} & -\bar{z}we^{\lambda_+ t} + z\bar{w}e^{\lambda_- t} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2i \operatorname{Im}(z\bar{w})} \begin{pmatrix} 2i \operatorname{Im}(z\bar{w}e^{\lambda_+ t}) & -|z|^2 2i \operatorname{Im}(e^{\lambda_+ t}) \\ |w|^2 2i \operatorname{Im}(e^{\lambda_+ t}) & -2i \operatorname{Im}(\bar{z}we^{\lambda_+ t}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\operatorname{Im}(z\bar{w})} \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(z\bar{w}) \operatorname{Im}(e^{\lambda_+ t}) + \operatorname{Im}(z\bar{w}) \operatorname{Re}(e^{\lambda_+ t}) & -|z|^2 \operatorname{Im}(e^{\lambda_+ t}) \\ |w|^2 \operatorname{Im}(e^{\lambda_+ t}) & -\operatorname{Re}(\bar{z}w) \operatorname{Im}(e^{\lambda_+ t}) - \operatorname{Im}(\bar{z}w) \operatorname{Re}(e^{\lambda_+ t}) \end{pmatrix} = M, \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant

$$\operatorname{Re}(\bar{z}w) = \operatorname{Re}(z\bar{w}) = \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(\bar{w}) - \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(\bar{w}) = \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(w) + \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w),$$

$$\operatorname{Im}(z\bar{w}) = -\operatorname{Im}(\bar{z}w) = -\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(w) + \operatorname{Im}(z)\operatorname{Re}(w),$$

$$|z|^2 = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2,$$

$$|w|^2 = \operatorname{Re}(w)^2 + \operatorname{Im}(w)^2.$$

on calcule d'autre part que

$$\begin{aligned} & Q \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(e^{\lambda_+ t}) & -\operatorname{Im}(e^{\lambda_+ t}) \\ \operatorname{Im}(e^{\lambda_+ t}) & \operatorname{Re}(e^{\lambda_+ t}) \end{pmatrix} Q^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{Im}(z) & \operatorname{Re}(z) \\ \operatorname{Im}(w) & \operatorname{Re}(w) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(e^{\lambda_+ t}) & -\operatorname{Im}(e^{\lambda_+ t}) \\ \operatorname{Im}(e^{\lambda_+ t}) & \operatorname{Re}(e^{\lambda_+ t}) \end{pmatrix} \frac{1}{\operatorname{Im}(z)\operatorname{Re}(w) - \operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(w)} \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(w) & -\operatorname{Re}(z) \\ -\operatorname{Im}(w) & \operatorname{Im}(z) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\operatorname{Im}(z\bar{w})} \begin{pmatrix} \operatorname{Im}(z) & \operatorname{Re}(z) \\ \operatorname{Im}(w) & \operatorname{Re}(w) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(w)\operatorname{Re}(e^{\lambda_+ t}) + \operatorname{Im}(w)\operatorname{Im}(e^{\lambda_+ t}) & -\operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(e^{\lambda_+ t}) - \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(e^{\lambda_+ t}) \\ \operatorname{Re}(w)\operatorname{Im}(e^{\lambda_+ t}) - \operatorname{Im}(w)\operatorname{Re}(e^{\lambda_+ t}) & -\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(e^{\lambda_+ t}) + \operatorname{Im}(z)\operatorname{Re}(e^{\lambda_+ t}) \end{pmatrix} \\ & \hspace{15em} = M \end{aligned}$$