

Préambule I

De même que l'on peut définir des suites de points dans \mathbb{R}^n , on peut définir des suites de matrices dans $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Pour une suite $(A_k)_{k=0}^\infty \subset \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, on dit que

- a) $(A_k)_{k=0}^\infty$ converge vers $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|A_k - A\|_F = 0,$$

où $\|\cdot\|_F$ désigne la norme de Frobenius.

- b) $(A_k)_{k=0}^\infty$ est de Cauchy si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall k \geq K, \forall m \geq 0, \|A_{k+m} - A_k\| < \varepsilon.$$

Résultat : $(A_k)_{k=0}^\infty$ converge $\Leftrightarrow (A_k)_{k=0}^\infty$ est de Cauchy.

Rappel :

(a) $\|\cdot\|_F$ est une norme, en particulier, $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}), \|A + B\|_F \leq \|A\|_F + \|B\|_F$.

(b) $\|\cdot\|_F$ est dite sous-multiplicative, $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}), \|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$.

- c) On définit la série $\sum_{k=0}^\infty A_k$ comme la limite des sommes partielles, quand cette limite existe, c'est-à-dire

$$\sum_{k=0}^\infty A_k = \lim_{K \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^K A_k.$$

Préambule II

On définit les fonctions "matricielles" $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ de manière similaire aux fonctions vectorielles $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Soit I un intervalle, alors

$$A : I \rightarrow \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$$

$$t \mapsto A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

avec $a_{ij} : I \rightarrow \mathbb{R}$ pour $i, j = 1, \dots, n$.

- a) Pour $A : I \rightarrow \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ et $A_0 \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, on dit que A converge vers A_0 quand $t \rightarrow t_0$, noté $\lim_{t \rightarrow t_0} A(t) = A_0$, si et seulement si

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \|A(t) - A_0\|_F = 0.$$

- b) On dit que A est dérivable en t si et seulement si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(t+h) - A(t)}{h}$$

existe, c'est-à-dire s'il existe $B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ telle que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(t+h) - A(t)}{h} = B,$$

et on note $B = A'(t)$.

Préambule III

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, son polynôme caractéristique est donné par

$$\chi_A(x) = x^2 - \operatorname{tr}A x + \det A.$$

Il y a trois cas possibles.

- a) χ_A possède deux racines réelles distinctes, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, donc A possède deux valeurs propres réelles distinctes et est diagonalisable dans \mathbb{R} , *i.e.* il existe $P \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ telle que

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

- b) χ_A possède une seule racine réelle double λ , et donc A n'a qu'une seule valeur propre, qui est réelle.

- (a) Si la multiplicité géométrique de λ est deux, alors A est multiple de l'identité (donc en particulier diagonale, donc trivialement diagonalisable) et

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_2.$$

- (b) Si la multiplicité géométrique de λ est une alors A n'est pas diagonalisable, mais admet une forme de Jordan: il existe $P \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ telle que

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}$$

- c) χ_A possède deux racines, non réelles, conjuguées λ_1 et λ_2 , où $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$. A possède alors deux valeurs propres complexes, non réelles, et est diagonalisable dans \mathbb{C} : il existe $P \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ telle que

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Exercice 1. Pour s'échauffer

Soit $(A_k)_{k=0}^\infty \subset \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ une suite de matrices. Montrer que si la série $\sum_{k=0}^\infty \|A_k\|_F$ converge, alors

la série $\sum_{k=0}^\infty A_k$ converge.

Exercice 2. Exponentielle de matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Montrer que la série $\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} A^k$, avec la convention $A^0 = I$, converge. On définit alors l'exponentielle de la matrice A comme la matrice

$$e^A = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} A^k.$$

Exercice 3. Dérivée de l'exponentielle d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, on définit, pour tout $t \in \mathbb{R}$ la fonction "exponentielle de matrice" par

$$\begin{aligned} E : \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \\ t &\mapsto E(t) = e^{At} \end{aligned}$$

Montrer que

$$E'(t) = AE(t).$$

Indication : On peut utiliser, sans preuve, le résultat suivant. Si $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ commutent (c'est-à-dire $AB = BA$), alors

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

Exercice 4.

Soit $A : I \rightarrow \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ une fonction matricielle dérivable sur I et $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Soit $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ défini par $y(t) = A(t)y_0$. Montrer que $y'(t) = A'(t)y_0$.

Exercice 5. Système linéaire homogène d'EDO

Soit $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz implique qu'il existe une unique solution $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ du système d'EDO

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t), \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

Vérifier que cette solution est donnée par $y(t) = e^{At}y_0$.

Exercice 6. Exponentielle d'une matrice 2×2 , cas diagonalisable

a) Soit $D \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ une matrice diagonale de la forme

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Montrer que

$$e^D = \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^\beta \end{pmatrix}.$$

b) Dédire du point précédent que si A est diagonalisable dans \mathbb{R} , c'est-à-dire qu'il existe $P \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ telle que A s'écrit comme

$$A = PDP^{-1}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

alors pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{At} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Exercice 7. Exponentielle d'une matrice 2×2 , cas non diagonalisable avec une seule valeur propre réelle de multiplicité géométrique une

a) Soit $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ une matrice sous forme de Jordan

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Montrer par récurrence que, pour tout $k \geq 1$,

$$A^k = \begin{pmatrix} \alpha^k & k\alpha^{k-1} \\ 0 & \alpha^k \end{pmatrix}$$

et en déduire que

$$e^A = \begin{pmatrix} e^\alpha & e^\alpha \\ 0 & e^\alpha \end{pmatrix}.$$

b) Soit $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ une matrice sous forme de Jordan

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Montrer par récurrence que, pour tout $k \geq 1$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$(At)^k = \begin{pmatrix} t^k \alpha^k & kt^k \alpha^{k-1} \\ 0 & t^k \alpha^k \end{pmatrix}$$

et en déduire que

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} & te^{\alpha t} \\ 0 & e^{\alpha t} \end{pmatrix}.$$

c) Supposons que $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ possède deux valeurs propres réelles confondues de multiplicité géométrique une, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \mathcal{M}_{2 \times 2}$ inversible telle que $A = PJP^{-1}$, où $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ où λ est la valeur propre. Déduire du point précédent que

$$e^{At} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Exercice 8. Exponentielle de matrice, cas diagonalisable avec valeurs propres complexes conjuguées

Si $B \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ est diagonale, *i.e.*

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C},$$

on peut montrer que $e^B = \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^\beta \end{pmatrix}$ de la même manière que dans l'exercice 6. Soit à présent $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ telle que A possède deux valeurs propres complexes conjuguées $\lambda_{\pm} = a \pm ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. On peut écrire $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} z & \bar{z} \\ w & \bar{w} \end{pmatrix}$, inversible, $z, w \in \mathbb{C}$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{At} = Q \begin{pmatrix} e^{at} \cos(bt) & -e^{at} \sin(bt) \\ e^{at} \sin(bt) & e^{at} \cos(bt) \end{pmatrix} Q^{-1},$$

où $Q \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ est donnée par

$$Q = \begin{pmatrix} \operatorname{Im}(z) & \operatorname{Re}(z) \\ \operatorname{Im}(w) & \operatorname{Re}(w) \end{pmatrix}.$$