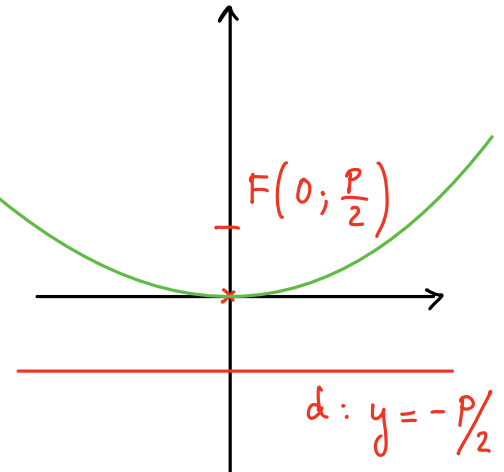


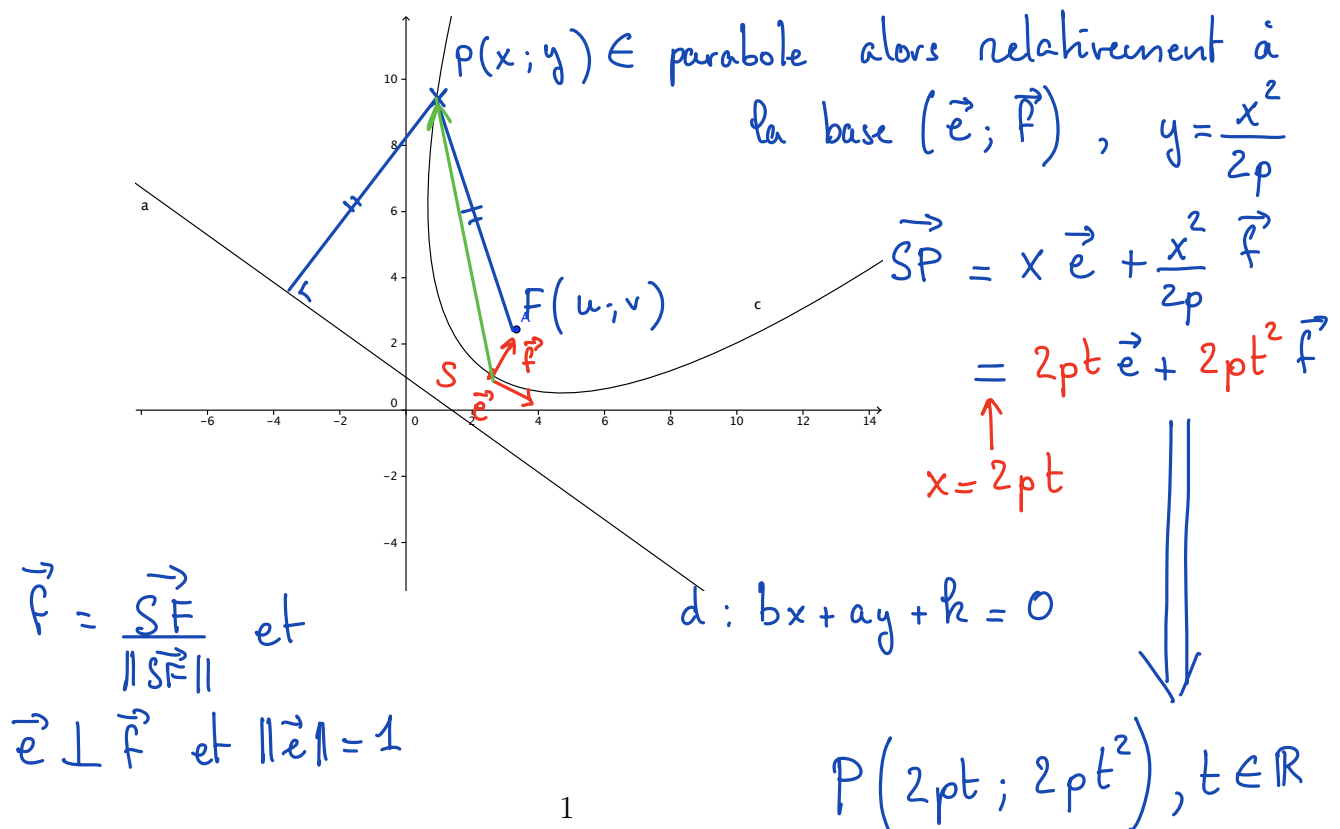
III. Les coniques



1 Rappel sur la parabole

Vous avez défini la parabole de foyer F et de droite directrice d , comme le *lieu géométrique* des points P du plan équidistants de F et de d (on suppose que F n'appartient pas à la directrice). Vous avez vu ensuite que le graphe de toute fonction quadratique $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, est une parabole. Pour cela, vous avez translaté le graphe horizontalement pour que son axe de symétrie soit l'axe vertical $x = 0$, puis verticalement pour que son sommet soit le point $(0; 0)$. La fonction est alors de la forme $f(x) = x^2/2p$, dont le graphe est une parabole de foyer $F(0; p/2)$ et de directrice $y = -p/2$.

Regardons maintenant le cas général d'une parabole donnée par son foyer $F(u; v)$ et sa directrice d'équation $bx + ay + k = 0$.



Pour trouver l'équation générale de la parabole, nous posons simplement l'équation qui traduit l'égalité $\delta(P; F) = \delta(P; d)$ que nous élevons au carré pour ne pas trainer des racines carrées.

Soit $P(x; y)$ un point de la parabole. Alors

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = \frac{(bx+ay+k)^2}{a^2+b^2} \Leftrightarrow$$

$$(a^2+b^2)[x^2 - 2xu + u^2 + y^2 - 2yv + v^2] = b^2x^2 + a^2y^2 + k^2 + 2abxy + 2b^2kx + 2ak_y$$

$$\underbrace{a^2x^2 + b^2y^2 - 2abxy}_{=c} - \underbrace{2[u(a^2+b^2) + bk]x}_{=d} - \underbrace{2[v(a^2+b^2) + ak]y}_{=e} + \underbrace{(a^2+b^2)(u^2+v^2) - k^2}_{=0} = 0$$

Nous avons donc montré que l'équation générale d'une parabole est une équation quadratique en x et y , d'où le théorème suivant :

Théorème 1.1. Une parabole dans $\mathbb{R}^2$ est donnée par une équation cartésienne sous la forme

$$a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 + cx + dy + e = 0,$$

avec a, b, c, d et e des nombres réels. □

Exemple 1.2. Que détermine l'équation $x^2 - 2xy + y^2 = h^2$?

$$a^2 = b^2 = 1, c = d = 0, e = -h^2$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 = h^2$$

$$\Leftrightarrow x-y = \pm h \Leftrightarrow x-y = h \text{ ou } x-y = -h$$

C'est l'équation d'une paire de droites si $h \neq 0$ (une droite si $h=0$)

Pour terminer avec la parabole, regardons encore son équation *paramétrique*, c'est-à-dire une équation qui ne dépend que d'un paramètre souvent noté t . Le fait qu'il n'y ait qu'un paramètre indique que la parabole est un objet unidimensionnel et la lettre t rappelle le fait que cette équation pourrait représenter celle de la trajectoire d'un objet au cours du temps.

Soit $F(u; v)$ le foyer et d la directrice. Appelons S le point milieu du segment reliant F à sa projection orthogonale sur d . S est le sommet de la parabole. Choisissons un repère orthonormé en S composé de deux vecteurs $\vec{e}$ et $\vec{f}$, où $\vec{f} = \frac{2}{p}\vec{SF}$ est obtenu en normalisant $\vec{SF}$.

Nous avons tout fait pour nous ramener à l'équation quadratique $y = \frac{1}{2p}x^2$ et pouvons écrire :

Proposition 1.3. Une parabole dans $\mathbb{R}^2$ est donnée par une équation paramétrique de la forme suivante, où $(\vec{e}, \vec{f})$ est une base orthonormée, S un point du plan et $p \in \mathbb{R}$:

$$\vec{SP}(t) = 2pt\vec{e} + 2pt^2\vec{f} = 2p \left(t\vec{e} + t^2\vec{f} \right)$$

2 L'hyperbole

Comme pour la parabole, on fixe un point F appelé le foyer et une droite d appelée la directrice.

Définition 2.1. Soit $e > 1$. L'hyperbole de foyer F et de directrice d est le lieu géométrique des points P du plan tels que $\delta(P, F) = e \delta(P, d)$. On appelle e l'excentricité de l'hyperbole.

Pour nous ramener à l'étude analytique de l'hyperbole, nous allons effectuer un changement de repère de sorte à translater le foyer à l'origine et effectuer une rotation pour que la directrice soit verticale d'équation $x = k$.

Pour $P(x; y)$, l'égalité $\delta(P, F) = e \delta(P, d)$ élevée au carré devient

$$x^2 + y^2 = e^2(x - k)^2 = e^2x^2 - 2e^2kx + e^2k^2$$

Remarquons qu'il y a deux points S et S' sur la droite passant par F et orthogonale à d qui appartiennent à l'hyperbole. On appelle S et S' les sommets de l'hyperbole. Ils correspondent aux rapports de section $(FD, S) = -e$ et $(FD, S') = e$.

Nous utiliserons plus tard que $\delta(S', d) = \delta(S, d) \frac{e+1}{e-1}$.

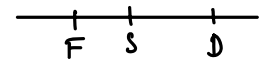
Démontrons-le ici :

$$\begin{aligned} \delta(S', d) &= \delta(S', F) - \delta(F, S) - \delta(S, d) \\ &= e \delta(S', d) - e \delta(S, d) - \delta(S, d) \\ \Leftrightarrow \delta(S', d)(1 - e) &= -\delta(S, d)(1 + e) \\ \stackrel{e > 1}{\Leftrightarrow} \delta(S', d) &= \delta(S, d) \cdot \frac{1+e}{e-1} \end{aligned}$$

Rappel :

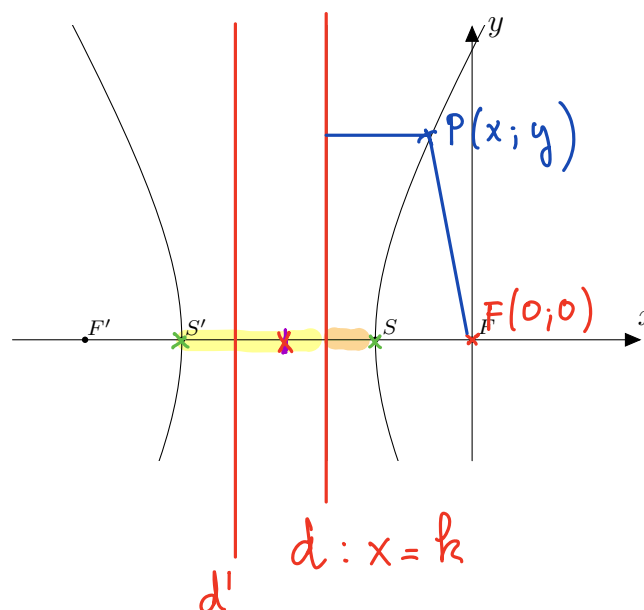
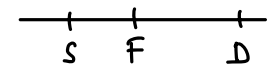
$$\bullet (FD, S) = \frac{FS}{DS} < 0$$

si S est entre F et D



$$\bullet (FD, S) = \frac{FS}{DS} > 0$$

Sinon



On obtient les abscisses des sommets en posant $y = 0$ dans l'équation $x^2 + y^2 = e^2(x - k)^2$:

$$\Rightarrow x^2 = e^2(x - k)^2 \Leftrightarrow \pm x = e(x - k) \Leftrightarrow ek = ex \pm x \Leftrightarrow x = \frac{ek}{e \pm 1}$$

Le milieu de S et S' se trouve donc en

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{ek}{e-1} + \frac{ek}{e+1} \right) = \frac{ek(e+1) + ek(e-1)}{2(e^2-1)} = \frac{2ek}{2(e^2-1)}$$

Pour obtenir plus de symétrie, nous effectuons une translation horizontale pour amener l'origine en ce point milieu. Nous remplaçons donc x par $X = x - \frac{ek}{e^2-1}$ et y reste inchangé $Y = y$.

L'équation devient maintenant

$$\left(X + \frac{ek}{e^2-1} \right)^2 + Y^2 = e^2 \left(X + \frac{ek}{e^2-1} - k \right)^2 = e^2 \left(X + \frac{k}{e^2-1} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow X^2 + 2 \frac{ek^2}{e^2-1} X + \frac{e^4 k^2}{(e^2-1)^2} + Y^2 = e^2 \left(X^2 + 2 \frac{k}{e^2-1} X + \frac{k^2}{(e^2-1)^2} \right)$$

$$\Leftrightarrow Y^2 = (e^2-1)X^2 + \frac{e^2 k^2}{(e^2-1)^2} - \frac{e^4 k^2}{(e^2-1)^2} = \frac{e^2 k^2 (1-e^2)}{-(e^2-1)^2} = \frac{e^2 k^2}{1-e^2}$$

$$\Leftrightarrow Y^2 = (e^2-1)X^2 + \frac{e^2 k^2}{1-e^2} \quad \left(\Leftrightarrow \frac{X^2}{\frac{e^2-1}{e^2 k^2}} - \frac{Y^2}{\frac{e^2 k^2}{e^2-1}} = 1 \right)$$

Proposition 2.2. La médiatrice du segment $[SS']$ est un axe de symétrie de l'hyperbole et le milieu de $[SS']$ est un centre de symétrie.

Démonstration. Si le point $P(x, y)$ vérifie l'équation ci-dessus, alors $P'(-x, y)$ et $P''(-x, -y)$ aussi.

et $P'''(x, -y)$ aussi $\square$

Le comportement asymptotique est une autre conséquence de l'équation précédente.

Proposition 2.3. Les droites d'équation $y = \pm \sqrt{e^2-1} x$ sont les asymptotes obliques des courbes

$$\text{d'équation } y^2 = (e^2-1)x^2 + \frac{e^2 k^2}{1-e^2}.$$

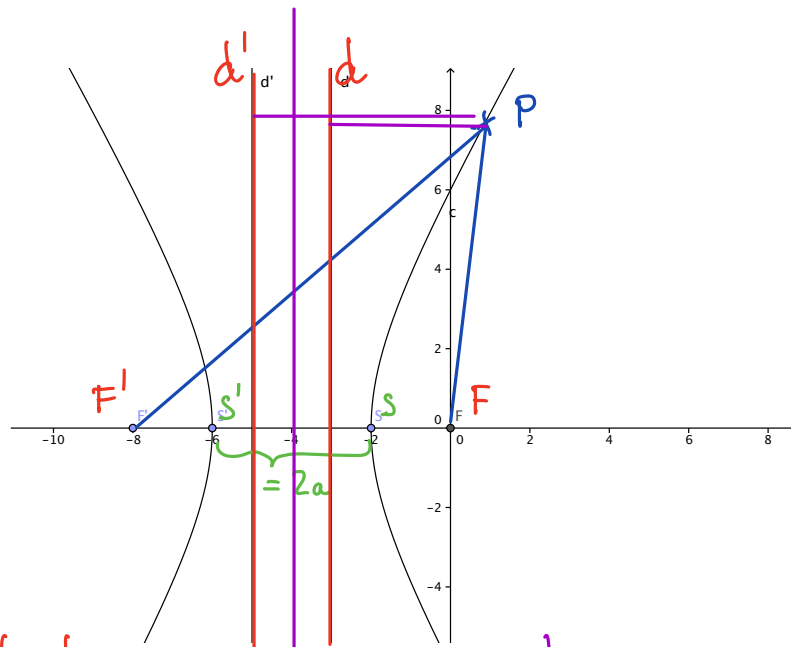
Démonstration. Lorsque x tend vers l'infini, le rapport $\left| \frac{y}{x} \right|$ tend vers $\sqrt{e^2-1}$. $\square$

$$\frac{y^2}{x^2} = e^2-1 + \underbrace{\frac{e^2 k^2}{(1-e^2)x^2}}_{\xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0}$$

L'axe de symétrie découvert ci-avant permet de démontrer le caractère *bifocal* de l'hyperbole.

Proposition 2.4. Soient F et F' deux points distincts et $a > 0$. L'hyperbole de foyer F et dont la distance entre les sommets S et S' vaut $2a$ est le lieu géométrique des points P du plan qui vérifient $|\delta(P, F) - \delta(P, F')| = 2a$.

Démonstration. Avec les mêmes notations que sur l'illustration précédente (page 3), considérons un point arbitraire P de l'hyperbole. Supposons qu'il se trouve du même côté de d que F (sinon on change les rôles de F et F'). On a donc $\delta(P, F) = e \delta(P, d)$.



d' = symétrique de d par rapport à l'axe vertical | axe de symétrie

Puisque $\delta(P, F) = e \delta(P, d)$, alors $\delta(P, F') = e \delta(P, d')$

On a montré en p.3 que $\delta(S', d) \stackrel{①}{=} \frac{e+1}{e-1} \delta(S, d)$

$$\Rightarrow \delta(S, S') \stackrel{②}{=} \delta(S, d) + \delta(S', d) \stackrel{③}{=} \delta(S, d) + \frac{e+1}{e-1} \delta(S, d) \stackrel{④}{=} \frac{2e}{e-1} \delta(S, d)$$

$$\Rightarrow \delta(d, d') \stackrel{⑤}{=} \delta(S, S') - 2 \cdot \delta(S, d) = \frac{2e}{e-1} \delta(S, d) - 2 \delta(S, d) \stackrel{⑥}{=} \frac{2}{e-1} \delta(S, d)$$

Par suite $\delta(P, F') - \delta(P, F) = e \delta(P, d') - e \delta(P, d) = e \delta(d, d')$

$$\stackrel{⑦}{=} e \cdot \frac{2}{e-1} \delta(S, d) = \delta(S, S') = 2a \quad \square$$

La **forme canonique** de l'équation d'une hyperbole dont les foyers se trouvent sur une droite² horizontale est la suivante :

$$\frac{(x-u)^2}{a^2} - \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1. \quad a^2 = \frac{e^2 h^2}{(e^2 - 1)^2}, \quad b^2 = \frac{e^2 h^2}{e^2 - 1}$$

Le point $(u; v)$ est le point milieu des deux foyers.

En translatant ce point en l'origine, on obtient l'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

L'excentricité e de l'hyperbole doit satisfaire $e^2 - 1 = \frac{b^2}{a^2}$, ou encore $e = \sqrt{b^2/a^2 + 1} = \cosh(\operatorname{arcsinh}(b/a))$.

La demi-distance entre les deux sommets est a .

Une grandeur importante est $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, la demi-distance entre les foyers et ainsi, $e = \frac{c}{a}$.

Et pour trouver les directrices, il faut refaire une translation pour mettre le foyer à l'origine !

Quant à l'équation paramétrique, nous en avons vue une en définissant les fonctions de trigonométrie hyperbolique. L'hyperbole dont nous avons écrit l'équation analytique canonique est parcourue par la courbe d'équation

$$f(t) = (\pm a \cosh t + u, b \sinh t + v).$$

Exemple 2.5. Déterminons les caractéristiques de l'hyperbole dont l'équation est $4y^2 - x^2 = 16$. Nous commençons par écrire l'équation sous forme canonique

$$\frac{y^2}{2^2} - \frac{x^2}{4^2} = 1$$

Pour utiliser les formules, il faut permuter les rôles de x et y .

On a donc une hyperbole centrée en $(0,0)$, orientée "verticalement"

$\Rightarrow$ les foyers se trouvent sur l'axe vertical $x = 0$

Eq. p.4 $y^2 = (e^2 - 1)x^2 + \frac{e^2 h^2}{1 - e^2}$ avec $x^2 = 4y^2 - 16$, on a

$$e^2 - 1 = 4 \Rightarrow e = \sqrt{5}$$

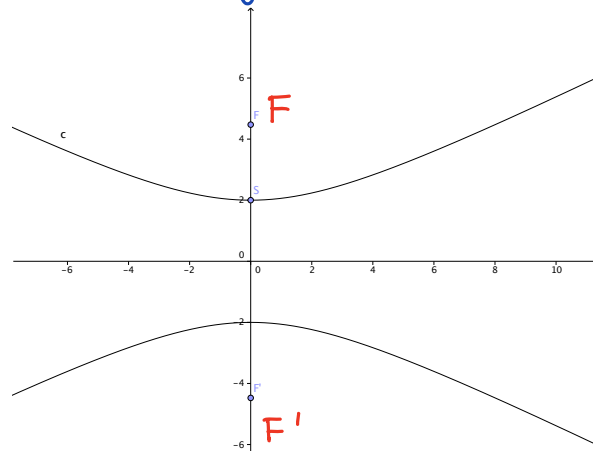
$$\frac{5h^2}{-4} = -16 \Rightarrow h = \pm \sqrt{\frac{64}{5}} = \pm \frac{8\sqrt{5}}{5} \Rightarrow$$

Sommets de l'hyperbole : $x = 0 \Rightarrow y = \pm 2$

Foyers en $(0; \pm c)$ avec $c = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Directrices : $k - c = \frac{8\sqrt{5}}{5} - 2\sqrt{5} = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow y = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$F(0; 2\sqrt{5})$ et $d: y = -\frac{2\sqrt{5}}{2}$, $F'(0; -2\sqrt{5})$ et $d': y = \frac{2\sqrt{5}}{2}$



3 L'ellipse

L'étude de l'ellipse est en tous points similaire à celle de l'hyperbole. Elle correspond au cas où l'excentricité est comprise entre 0 et 1 (strictement).

Définition 3.1. Soit $0 < e < 1$. L'ellipse de foyer F et de directrice d est le lieu géométrique des points P du plan tels que $\delta(P, F) = e \delta(P, d)$. On appelle e l'excentricité de l'ellipse.

Vous verrez en exercice que l'ellipse admet aussi une description bifocale.

Proposition 3.2. Soient F et F' deux points distincts et $a > 0$. Une ellipse est le lieu géométrique des points P du plan qui vérifient $\delta(P, F) + \delta(P, F') = 2a$.

La forme canonique de l'équation d'une ellipse dont les foyers se trouvent sur une droite horizontale est la suivante :

$$\frac{(x - u)^2}{a^2} + \frac{(y - v)^2}{b^2} = 1,$$

avec $a > b$. Le « grand axe » est de longueur $2a$, le « petit axe » de longueur $2b$.

Proposition 3.3. La distance entre le centre $(u; v)$ de l'ellipse et les foyers vaut $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Démonstration. Quitte à effectuer une translation, on peut supposer que le centre est situé en l'origine. L'équation $\frac{b^2}{a^2}x^2 + y^2 = b^2$ nous permet de calculer l'excentricité car

$$1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Utilisons l'expression bifocale $\delta(P, F) + \delta(P, F') = 2a$ et le point $P(0; b)$:

puisque le centre est à l'origine, si $F(c; 0)$, alors $F'(-c; 0)$ et on obtient

$$2\sqrt{b^2 + c^2} = 2a \Leftrightarrow c^2 = a^2 - b^2 \Leftrightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} \text{ puisque } a, b, c > 0.$$

□

Exemple 3.4. Quelle est la courbe d'équation $4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0$?

Il n'y a pas de termes en xy , ce qui indique que nous pouvons compléter les carrés pour nous ramener à l'équation sous forme canonique :

$$\begin{aligned} 4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0 &\Leftrightarrow 4(x^2 - 12x + 36) + 9(y^2 + 8y + 16) = -144 + 4 \cdot 36 + 9 \cdot 16 \\ &\Leftrightarrow 4(x - 6)^2 + 9(y + 4)^2 = 144 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x - 6)^2}{6^2} + \frac{(y + 4)^2}{4^2} = 1 \end{aligned}$$

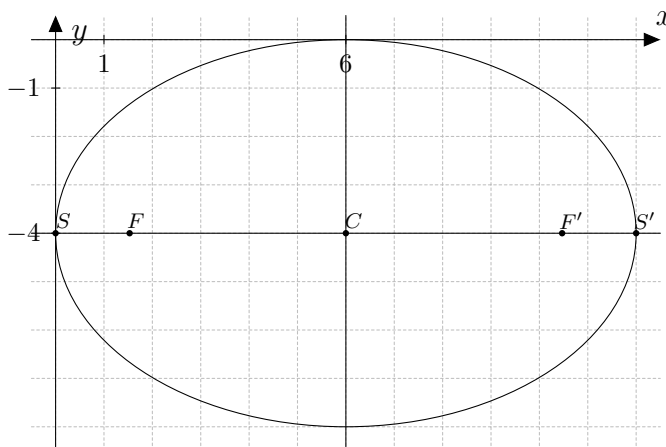
Il s'agit d'une ellipse dont le grand axe est horizontal et de longueur $2 \cdot 6 = 12$;
le petit axe est vertical et de longueur $2 \cdot 4 = 8$.

Centre $C(6 ; -4)$

Sommets : on pose $y = -4$ d'où $\frac{(x - 6)^2}{6^2} = 1 \Leftrightarrow x = 6 \pm 6$ d'où $S_1(0 ; -4)$ et $S_2(12 ; -4)$

Foyers : ils se trouvent sur le grand axe à distance $\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = 2\sqrt{5}$ du centre C d'où

$F_1(6 + 2\sqrt{5} ; -4)$ et $F_2(6 - 2\sqrt{5} ; -4)$



Résumé :

Parabole : $\delta(P, F) = \delta(P, d)$

Hyperbole

$$e > 1$$

$$\delta(P, F) = e \delta(P, d)$$

Ellipse

$$0 < e < 1$$

$$\frac{(x-u)^2}{a^2} - \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x-u)^2}{a^2} + \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1$$

Centre (u, v)

$$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} > 1$$

$$0 < e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} < 1$$

 $2a =$ distance entre S et S'
 $2a =$ grand axe
 $2b =$ petit axe

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = e \cdot a$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = e \cdot a$$

$$c = \frac{1}{2} \text{ distance entre } F \text{ et } F'$$