



1

Enseignant·es: Dubuis
Analyse avancée II - PH
- - 2026
Durée : 210 minutes

999999













Cocher la case "Présent·e"

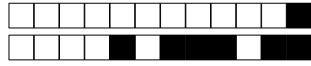
Présent·e

Absent·e

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 28 pages, les dernières pouvant être vides. Le total est de 100 points, partagés sur 27 questions. La question numéro 27 est une question bonus valant 3 points. La note sera calculée sur 97 points.

- Posez votre carte CAMIPRO sur la table et vérifiez votre numéro SCIPER sur la première page. Au démarrage de l'épreuve, cochez la case "Présent·e".
- **Aucun** document n'est autorisé. L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
les points indiqués si la réponse est correcte,
0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire. Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Si une question est erronée, les enseignant·es se réservent le droit de l'annuler.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie). Les brouillons ne seront pas ramassés. **Ne pas dégrafer.**

Respectez les consignes suivantes Observe this guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
     		



Formulaire

Trigonométrie circulaire

Formules d'addition :

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Formules de bissection :

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{2} \quad \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos x}{2} \quad \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

Expressions de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ en fonction de $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$:

$$\sin x = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \cos x = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \tan x = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \quad \cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \quad \sin x - \sin y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Trigonométrie hyperbolique

Définitions :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Formules d'addition :

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \quad \cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$\tanh(x + y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$$

Formules de bissection :

$$\sinh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh x - 1}{2} \quad \cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh x + 1}{2} \quad \tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}$$



Dérivée de quelques fonctions

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sinh x$	$\cosh x$	$\arg \sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\cosh x$	$\sinh x$	$\arg \cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\arg \tanh x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Développement limité de quelques fonctions

$f(x)$	Développement limité de $f(x)$ au voisinage de 0
$\frac{1}{1+x}$	$1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + x^n \cdot \varepsilon(x)$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n \cdot \varepsilon(x)$
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \cdot \varepsilon(x)$
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1} \cdot \varepsilon(x)$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n} \cdot \varepsilon(x)$
$\tan x$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + x^7 \cdot \varepsilon(x)$
$\sinh x$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1} \cdot \varepsilon(x)$
$\cosh x$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n} \cdot \varepsilon(x)$
$\tanh x$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + x^7 \cdot \varepsilon(x)$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + x^n \cdot \varepsilon(x)$

où $\varepsilon(x)$ est une fonction qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0.



Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Toutes les questions sur cette page se rapportent à l'énoncé ci-dessous.

Enoncé

Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée par $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\gamma(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t)).$$

Question 1 (3 points)

Soit $f : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x\sqrt{y}$. L'intégrale curviligne $\int_{\Gamma} f dl$ vaut

$-2\sqrt{2}\pi^2$
 0

$-2\pi^2$
 $2\pi^2$

$-\sqrt{2}\pi^2$
 $2\sqrt{2}\pi^2$

π^2
 $\sqrt{2}\pi^2$

Question 2 (2 points)

Un vecteur tangent à Γ au point $(\pi, 2)$ est

$(-3, 1)$
 $(1, -3)$

$(1, 2)$
 $(-1, 2)$

$(2, 0)$
 $(-1, 1)$

$(2, -1)$
 $(0, 2)$

Question 3 (2 points)

La longueur de Γ vaut

4
 8

4π
 π

8π
 1

2π
 2



Toutes les questions sur cette page se rapportent à l'énoncé ci-dessous.

Énoncé

Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2 \sin(x^2 + y^2)}{1 - \cos(\sqrt{x^2 + y^2})}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad g(x, y) = x(y+3)^2 + x^2(y+3)$$

Question 4 (2 points)

Soit $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$. La dérivée directionnelle $\frac{\partial g}{\partial v}(1, 0)$ vaut

- | | | | |
|--|--------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> $-2\sqrt{2}$ | <input type="checkbox"/> $2\sqrt{2}$ | <input type="checkbox"/> $\sqrt{2}$ | <input type="checkbox"/> $-8\sqrt{2}$ |
| <input type="checkbox"/> $-11\sqrt{2}$ | <input type="checkbox"/> $-\sqrt{2}$ | <input type="checkbox"/> $11\sqrt{2}$ | <input type="checkbox"/> $8\sqrt{2}$ |

Question 5 (3 points)

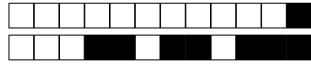
Soit $h(x, y) = f(x, y) \cdot g(x, y)$ La dérivée partielle $\frac{\partial h}{\partial x}(0, 0)$ vaut

- | | | | |
|-----------------------------|------------------------------|------------------------------|-----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 18 |
| <input type="checkbox"/> 36 | <input type="checkbox"/> -36 | <input type="checkbox"/> -18 | <input type="checkbox"/> -9 |

Question 6 (2 points)

La limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ vaut

- | | | | |
|-----------------------------|----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 1 |
| <input type="checkbox"/> -2 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> -3 | <input type="checkbox"/> -1 |



Toutes les questions sur cette page se rapportent à l'énoncé ci-dessous.

Énoncé

Soient $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(x, y, z) = \cos(\pi x) \sin(\pi y) + \sin(\pi z)$$

Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la surface définie implicitement par

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = 0\}.$$

Question 7 (2 points)

L'équation $F(x, y, z) = 0$ définit implicitement au voisinage de $(1, 0, 1)$ une fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\varphi(1, 0) = 1$ et $F(x, y, \varphi(x, y)) = 0$.

La pente de croissance maximale au point $(1, 0, 1)$ du graphe de φ est atteinte dans la direction (sens compris)

- | | | | |
|--------------------------------------|--|---|--------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> $(-\pi, 0)$ | <input type="checkbox"/> $(0, -1)$ | <input type="checkbox"/> $(\pi, 1)$ | <input type="checkbox"/> $(1, -\pi)$ |
| <input type="checkbox"/> $(1, 0)$ | <input type="checkbox"/> $(-\pi, \pi)$ | <input type="checkbox"/> $(-\pi, -\pi)$ | <input type="checkbox"/> $(-1, \pi)$ |

Question 8 (2 points)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = F(x, y, 0)$. L'équation $f(x, y) = 0$ définit implicitement une au voisinage de $(1/2, 1/2)$ une fonction $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\psi(1/2) = 1/2$ et $f(\psi(y), y) = 0$.

La pente de la tangente au graphe de ψ au point $(1/2, 1/2)$ est donné par

- | | | | |
|-------------------------------|--|--|---|
| <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> $-\pi$ | <input type="checkbox"/> $\frac{1}{2}$ | <input type="checkbox"/> 1 |
| <input type="checkbox"/> -1 | <input type="checkbox"/> $\frac{\pi}{2}$ | <input type="checkbox"/> π | <input type="checkbox"/> $-\frac{1}{2}$ |

Question 9 (2 points)

L'équation du plan tangent à Σ au point $(0, 0, 1)$ est donnée par

- | | | | |
|--|--------------------------------------|--|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> $x + y + z = 0$ | <input type="checkbox"/> $y - z = 1$ | <input type="checkbox"/> $x - y + z = 0$ | <input type="checkbox"/> $y - z = -1$ |
| <input type="checkbox"/> $x - z = -1$ | <input type="checkbox"/> $y + z = 1$ | <input type="checkbox"/> $x + z = 0$ | <input type="checkbox"/> $x - y = 1$ |



Toutes les questions sur cette page se rapportent à l'énoncé ci-dessous.

Énoncé

Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $f(x, y) = 2x^2 - 3y^2$ et $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

Question 10 (2 points)

La valeur maximale de f sous la contrainte $g(x, y) = 0$ est

- | | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|----------------------------|------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> -1 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> -4 |
| <input type="checkbox"/> -3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> -21 |

Question 11 (2 points)

La valeur minimale de f sous la contrainte $g(x, y) = 0$ est

- | | | | |
|-----------------------------|------------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| <input type="checkbox"/> -1 | <input type="checkbox"/> -21 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> -3 |
| <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> -4 |

Question 12 (2 points)

Le point stationnaire $(0, 0)$ est

- un point à minimum local.
- un point selle.
- un point à maximum local.
- d'une nature indéterminée



Les questions qui suivent sont indépendantes

Question 13 (3 points)

Soient $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (xyz^2, x + y + z)$ et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\nabla g(1, 3) = (2, -1)$. Soit finalement $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ donnée comme $h = g \circ f$. Alors $\frac{\partial h}{\partial z}(1, 1, 1)$ vaut

- | | | | |
|----------------------------|-----------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> -1 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> -4 |
| <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> -3 |

Question 14 (3 points)

Soit $f(x, y) = \cos(x + y)(1 + \sin(x + y))$. Le polynôme de Taylor de degré 2 de f au voisinage de $(0, 0)$ est

- $p_2(x, y) = 1 + x + y + xy + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$
- $p_2(x, y) = 1 + x + y - 2xy - x^2 - y^2$
- $p_2(x, y) = 1 + x + y - xy + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$
- $p_2(x, y) = 1 + x + y - 2xy + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$
- $p_2(x, y) = 1 + x + y + xy - x^2 - y^2$
- $p_2(x, y) = 1 + x + y - xy - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$

Question 15 (3 points)

Pour $t > 0$, on définit

$$F(t) = \int_t^{t^2} \frac{1}{x} e^{tx^2} dx$$

$F'(1)$ vaut

- | | | | |
|-------------------------------|--------------------------------|---|--|
| <input type="checkbox"/> $-e$ | <input type="checkbox"/> $-2e$ | <input type="checkbox"/> e | <input type="checkbox"/> $2e$ |
| <input type="checkbox"/> $3e$ | <input type="checkbox"/> $-3e$ | <input type="checkbox"/> $-\frac{e}{2}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{e}{2}$ |

Question 16 (3 points)

On considère l'intégrale double

$$I = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 \frac{5x}{1 + 2y^5} dy \right) dx.$$

Alors

- | | | | |
|---|---|---|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> $I = \frac{1}{2} \ln(2)$ | <input type="checkbox"/> $I = \frac{1}{3} \ln(2)$ | <input type="checkbox"/> $I = \frac{1}{4} \ln(3)$ | <input type="checkbox"/> $I = \ln(3)$ |
| <input type="checkbox"/> $I = \frac{1}{4} \ln(2)$ | <input type="checkbox"/> $I = \frac{1}{3} \ln(4)$ | <input type="checkbox"/> $I = \frac{1}{2} \ln(3)$ | <input type="checkbox"/> $I = \ln(2)$ |



Deuxième partie, Vrai-Faux

Pour les questions qui suivent, répondre par vrai ou faux.
Pour chaque question, le décompte des points est le suivant :

- 4 bonnes réponses : 4 points
- 3 bonnes réponses : 2 points
- 0 point sinon

Question 17 (4 points)

- Pour toute suite $(x_k)_{k=0}^{+\infty}$ qui converge et pour toute suite $(y_k)_{k=0}^{+\infty}$ bornée,

la suite $(z_k)_{k=0}^{+\infty}$ définie par $z_k = x_k y_k$ admet une sous-suite qui est de Cauchy.

VRAI FAUX

- Pour toute suite $(x_k)_{k=0}^{+\infty}$ divergente, toutes les composantes de $(x_k)_{k=0}^{+\infty}$ divergent.

VRAI FAUX

- Si f est une fonction à valeur réelle définie sur \mathbb{R}^n et si $(x_k)_{k=0}^{+\infty}$ est une suite telle que

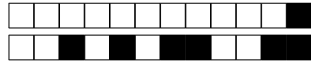
$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = a \in \mathbb{R}^n$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k)$ existe, alors f admet une limite en a .

VRAI FAUX

- Pour toute suite $(x_k)_{k=0}^{+\infty}$ qui converge,

la suite réelle $(u_k)_{k=0}^{+\infty}$ définie par $u_k = \sum_{i=1}^n x_{k,i}$ converge

VRAI FAUX

**Question 18** (4 points)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, non vide. Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur Ω :

- Si $x_0 \in \Omega$ et si f est continue en x_0 et si $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ existe pour tout $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|v\| = 1$, alors f est différentiable en x_0 .

VRAI FAUX

- Si $f \in C^4(\Omega)$, pour tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$, $\frac{\partial^4 f}{\partial x_1^2 \partial x_2 \partial x_3}(x) = \frac{\partial^4 f}{\partial x_3^2 \partial x_2 \partial x_1}(x)$

VRAI FAUX

- Si les dérivées partielles de f existent pour tout $x \in \Omega$ et si elles sont différentiables en $x_0 \in \Omega$, alors f est continûment différentiable en x_0 .

VRAI FAUX

- Si $f \in C^0(\Omega)$, et si $\gamma \in C^0(\mathbb{R}, \Omega)$ telle que $\lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t) = 0_{\mathbb{R}^n}$,

alors pour tout $x_0 \in \Omega$, $\lim_{t \rightarrow 0} f(x_0 + \gamma(t)) = f(x_0)$

VRAI FAUX

**Question 19** (4 points)

- Soit l'ensemble $E = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right), n \in \mathbb{N}^* \right\} \subset \mathbb{R}^2$. Le bord de E est $\partial E = E \cup (0, 0)$

VRAI FAUX

- Soit l'ensemble $E = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right), n \in \mathbb{N}^* \right\} \subset \mathbb{R}^2$.

L'ensemble des points d'accumulations de E est $E \cup (0, 0)$

VRAI FAUX

- Pour tous les sous-ensembles $A, B \subset \mathbb{R}^n$, si $A \cup B$ est borné, alors ∂A est borné.

VRAI FAUX

- L'ensemble $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 1 \text{ et } -1 < xy < 1\}$ est ouvert et borné.

VRAI FAUX



Troisième partie, questions de type ouvert - démonstration

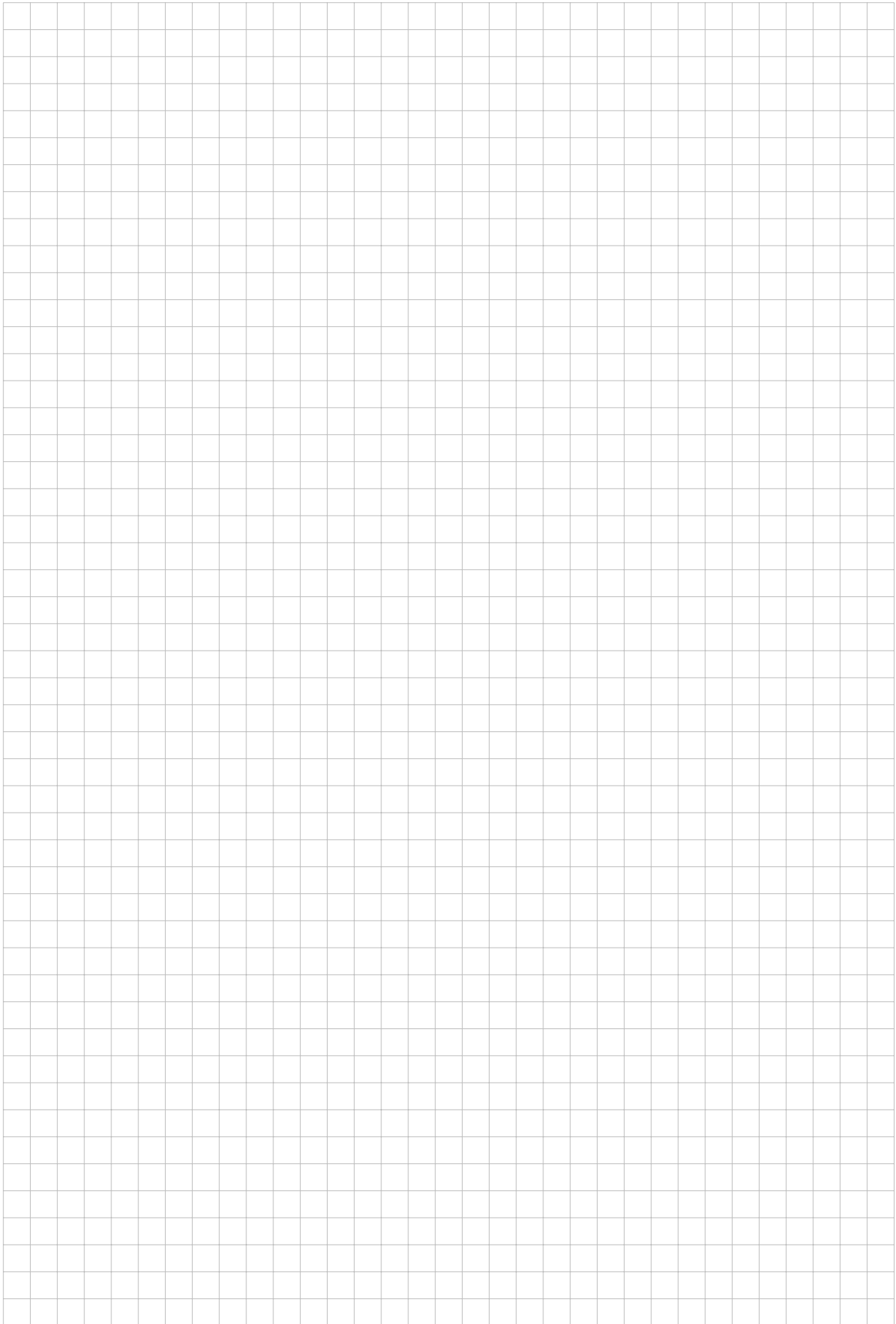
Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées à la correction.

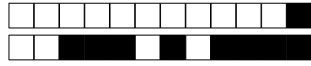
Question 20: Cette question est notée sur 7 points.

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5	
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
0	1	2	3	4	5	6	7		

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de $(x_0, y_0) \in D_f$. Montrer que si f est continûment différentiable en (x_0, y_0) , alors f est différentiable en (x_0, y_0) .







Question 21: Cette question est notée sur 7 points.

<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction telle que $D_f = \mathbb{R}^n$ et $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|\nabla f(x)\|_F \leq M.$$

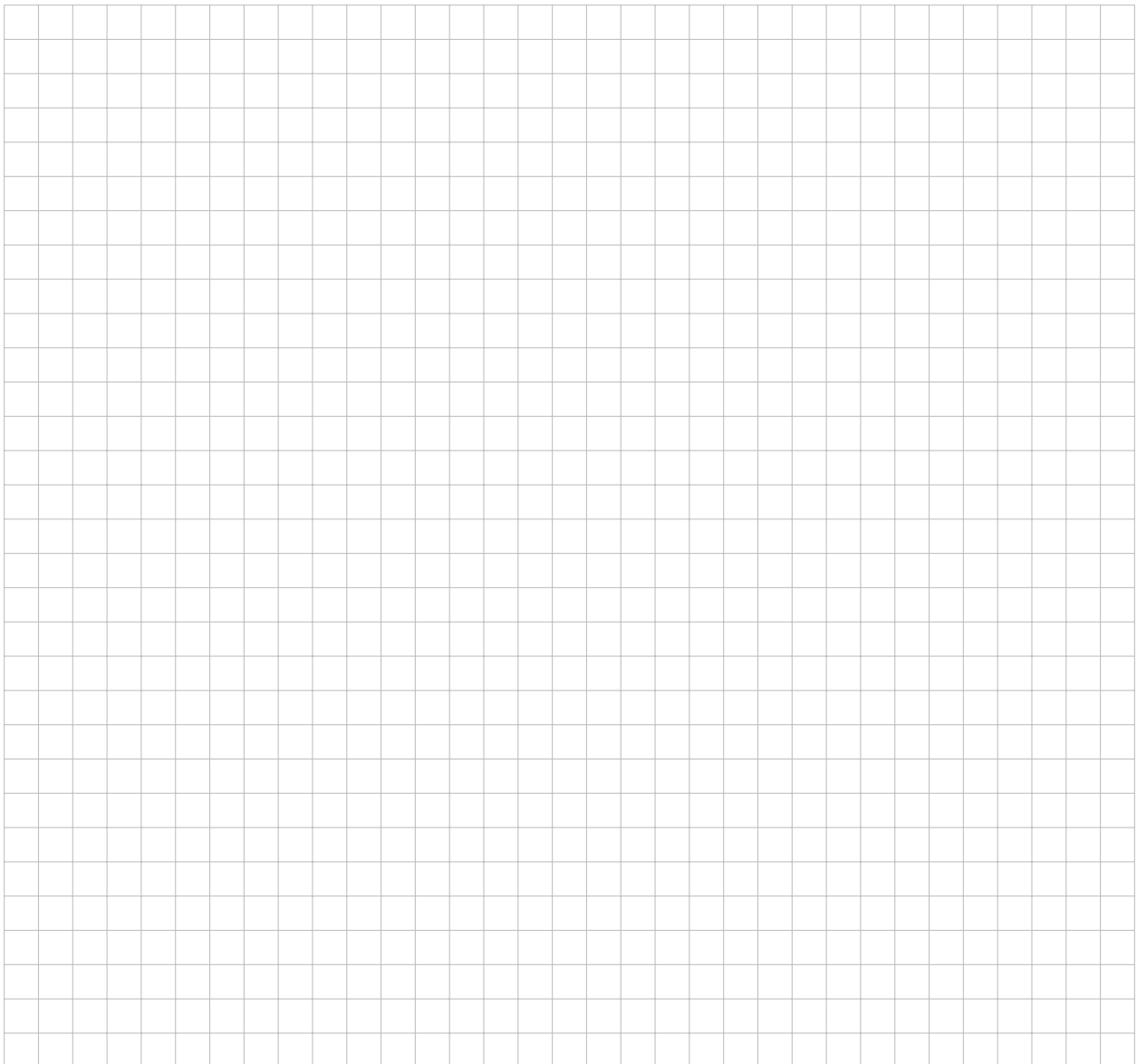
Soit $y \in \mathbb{R}^n$. On considère la suite $(y_k)_{k=0}^{+\infty} \subset \mathbb{R}^n$ définie par

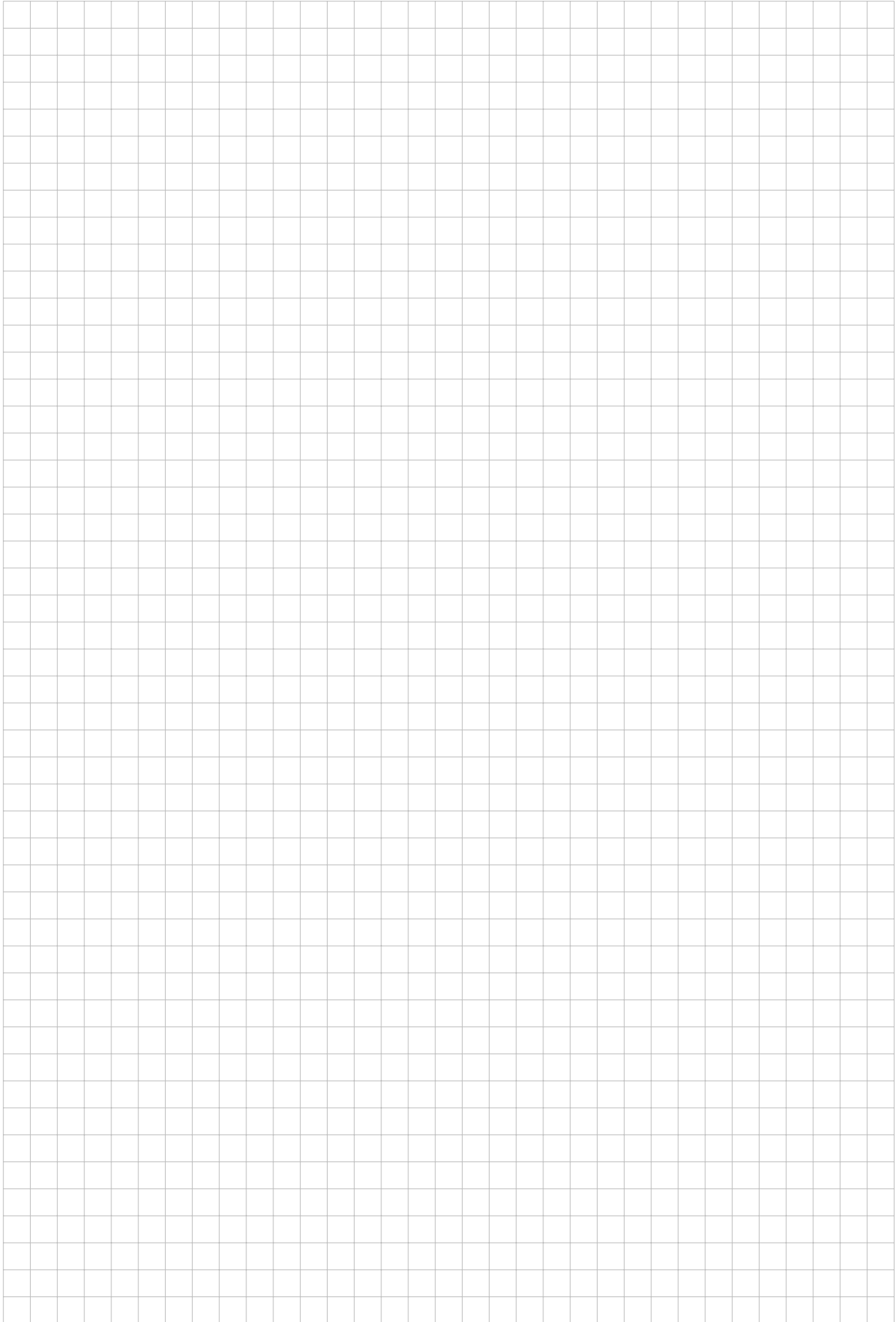
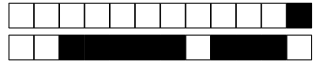
$$y_0 = y, y_k = f(y_{k-1}), k \in \mathbb{N}^*.$$

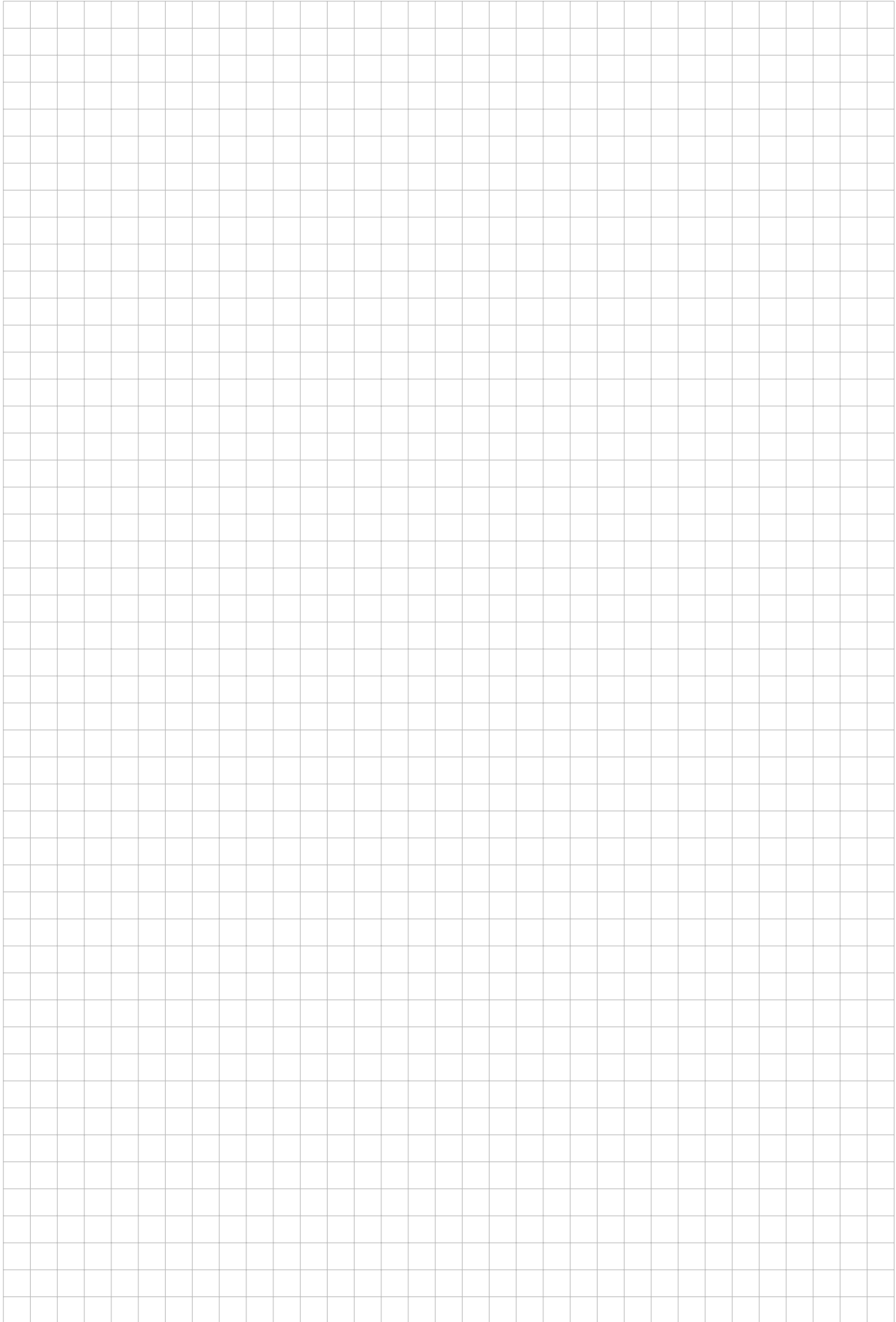
Soit finalement la suite $(z_k)_{k=0}^{+\infty} \subset \mathbb{R}$ définie par

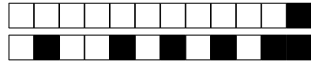
$$z_k = \|y_k\|.$$

Montrer que si $M < 1$, alors la suite $(z_k)_{k=0}^{+\infty}$ converge.









Quatrième partie, questions de type ouvert - questions calculatoires

Répondre dans l'espace dédié. Vos calculs doivent être soigneusement présentés, toutes les étapes de votre démarche doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées à la correction.

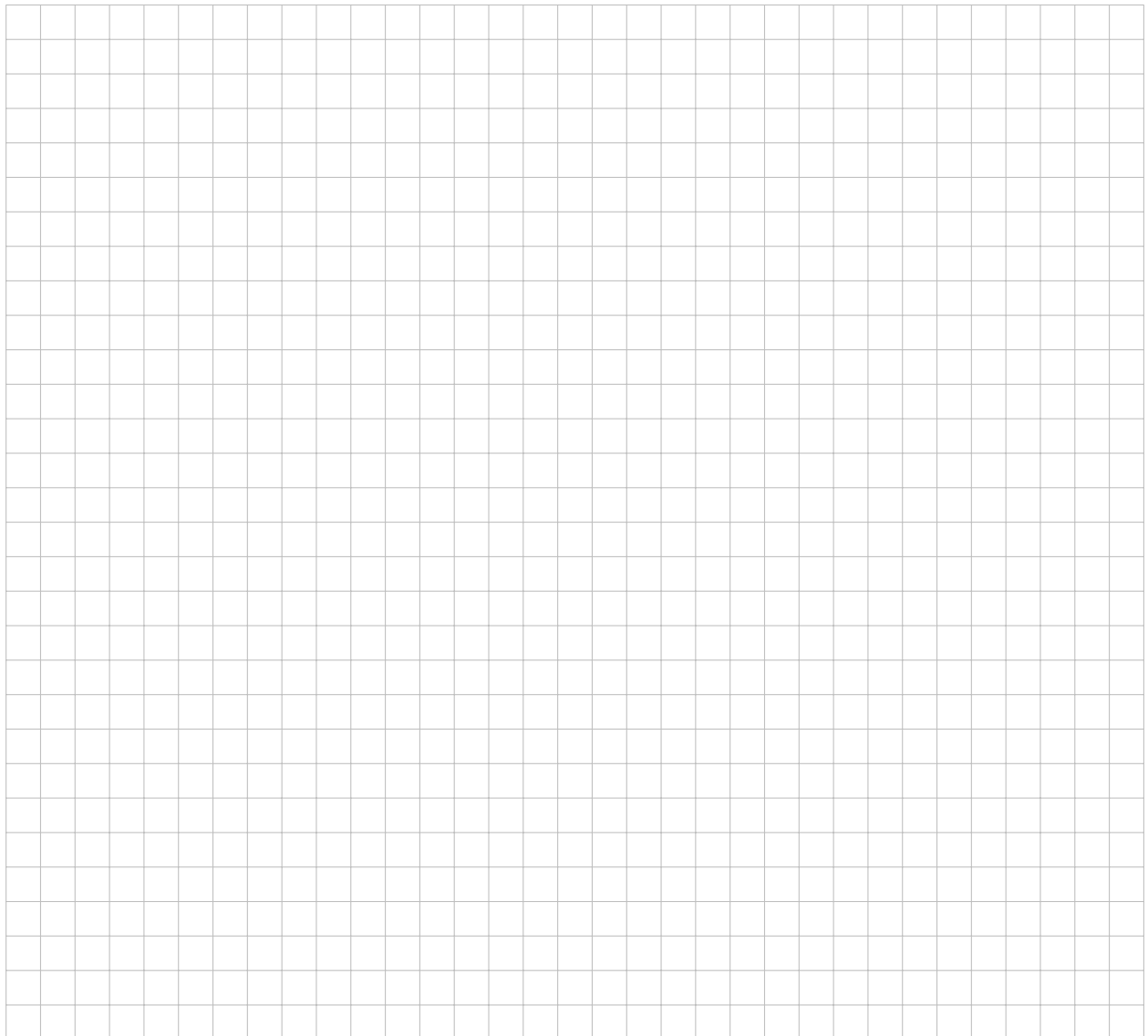
Question 23: Cette question est notée sur 6 points.

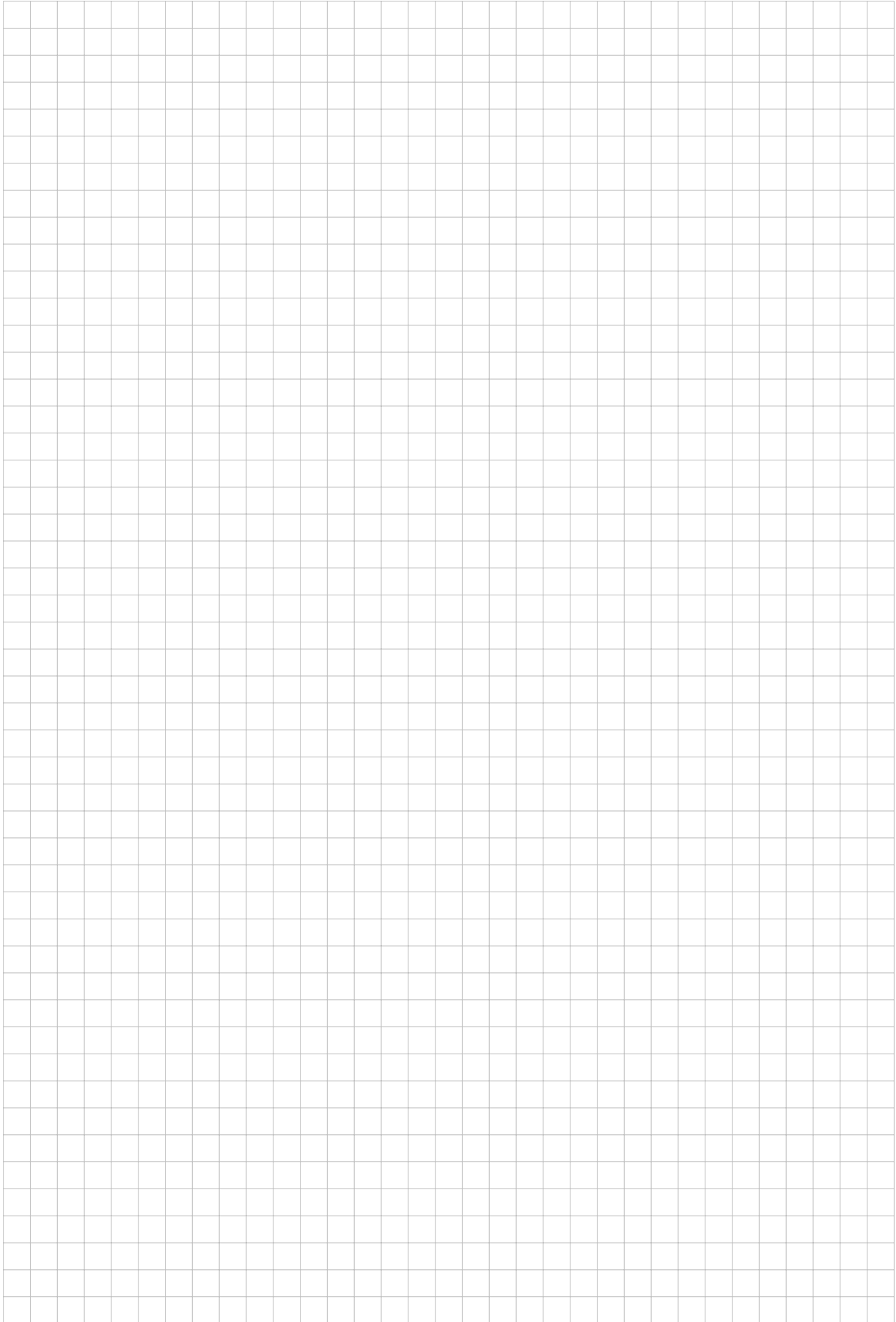
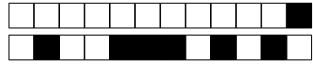
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

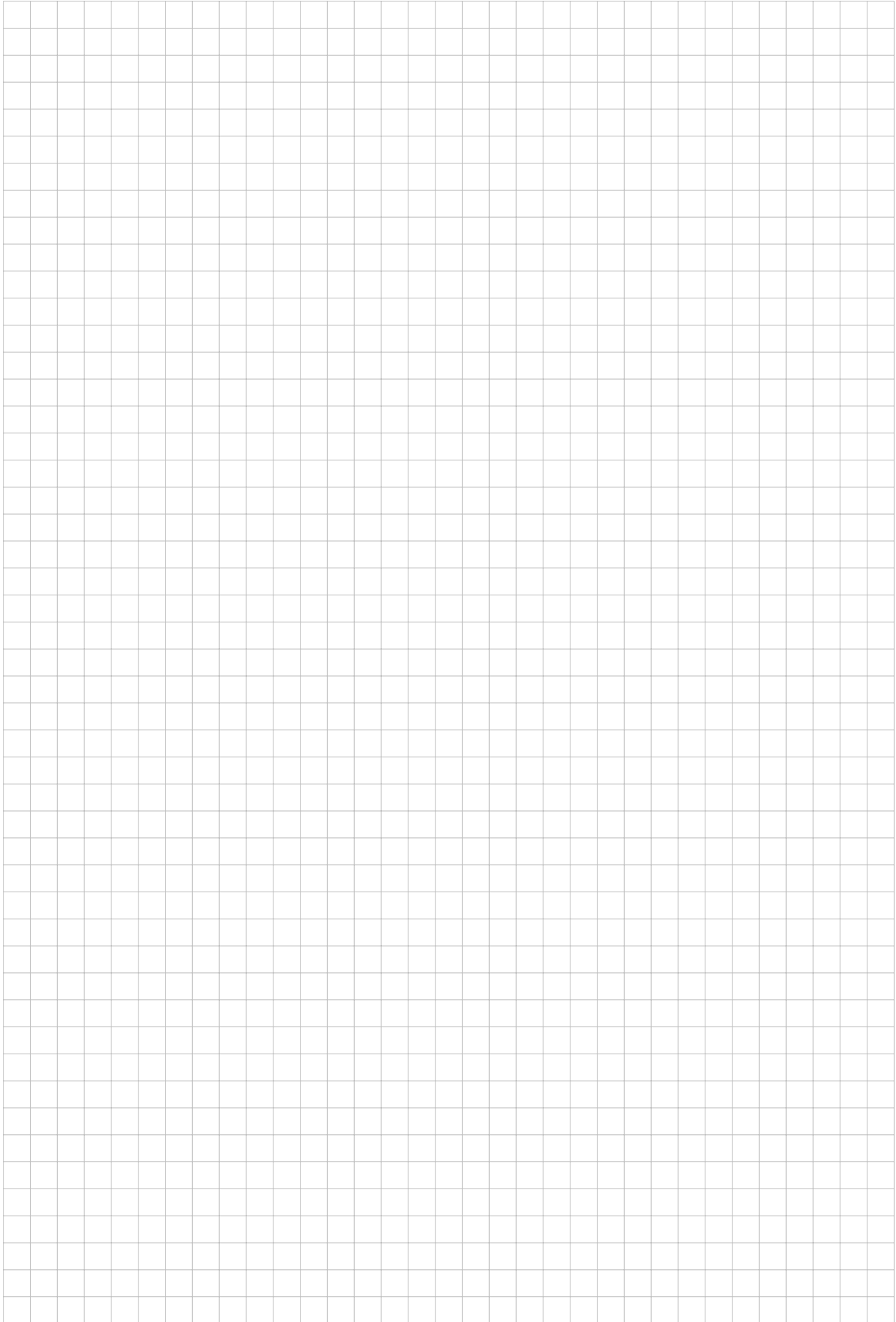
Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

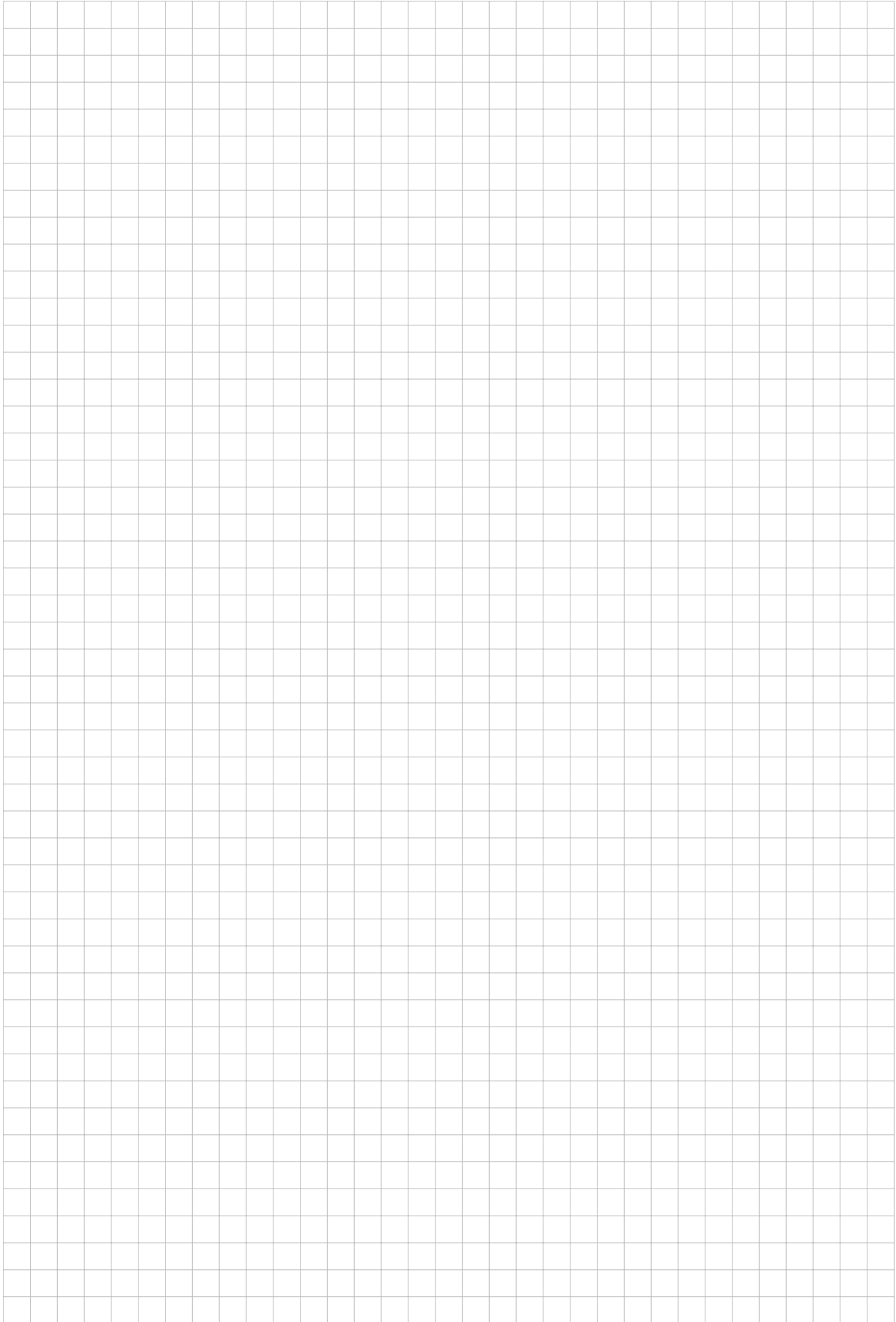
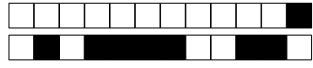
$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 y^2 \ln(x^4 + y^4), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Montrer que f est continûment différentiable en $(0, 0)$.









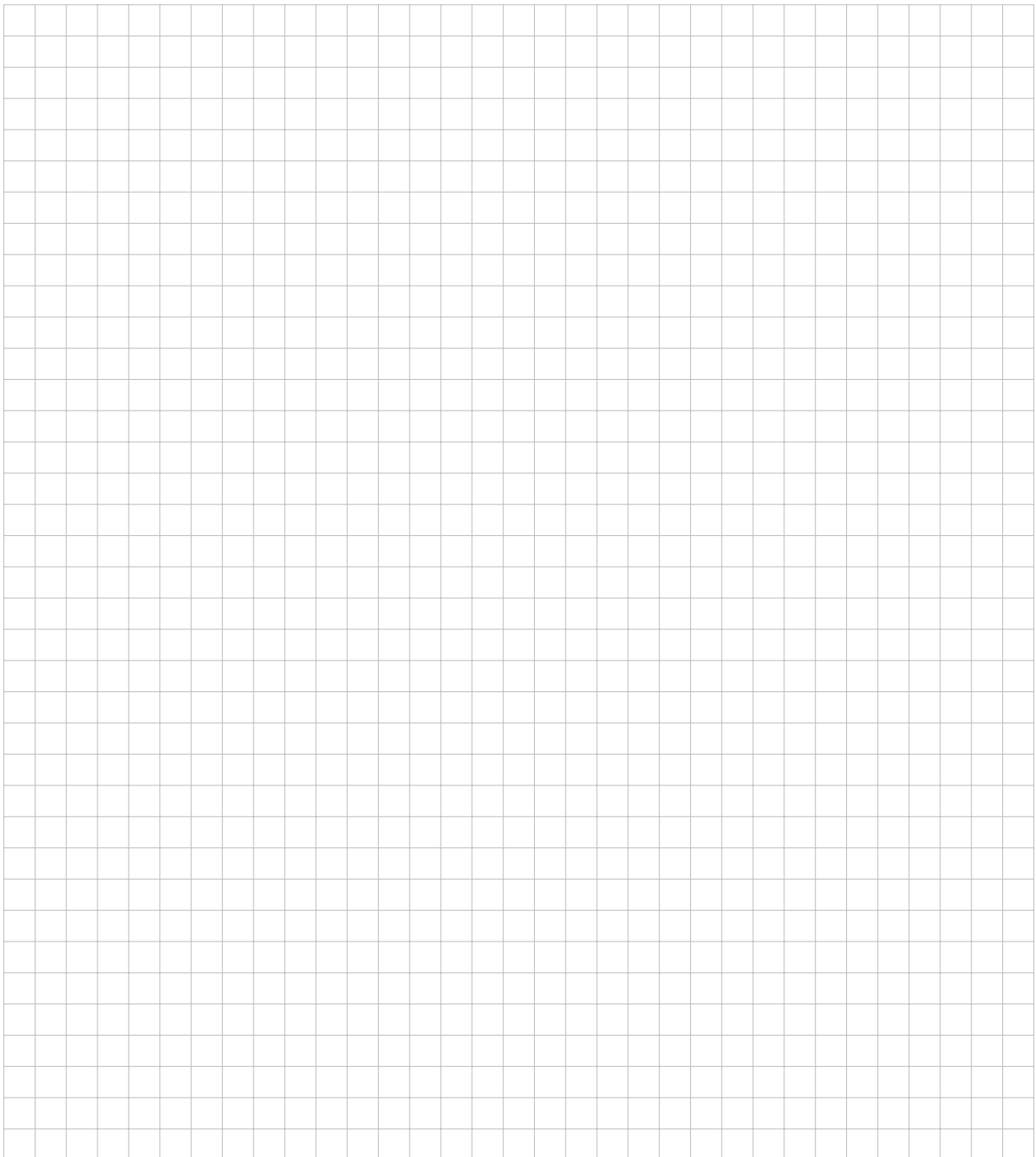


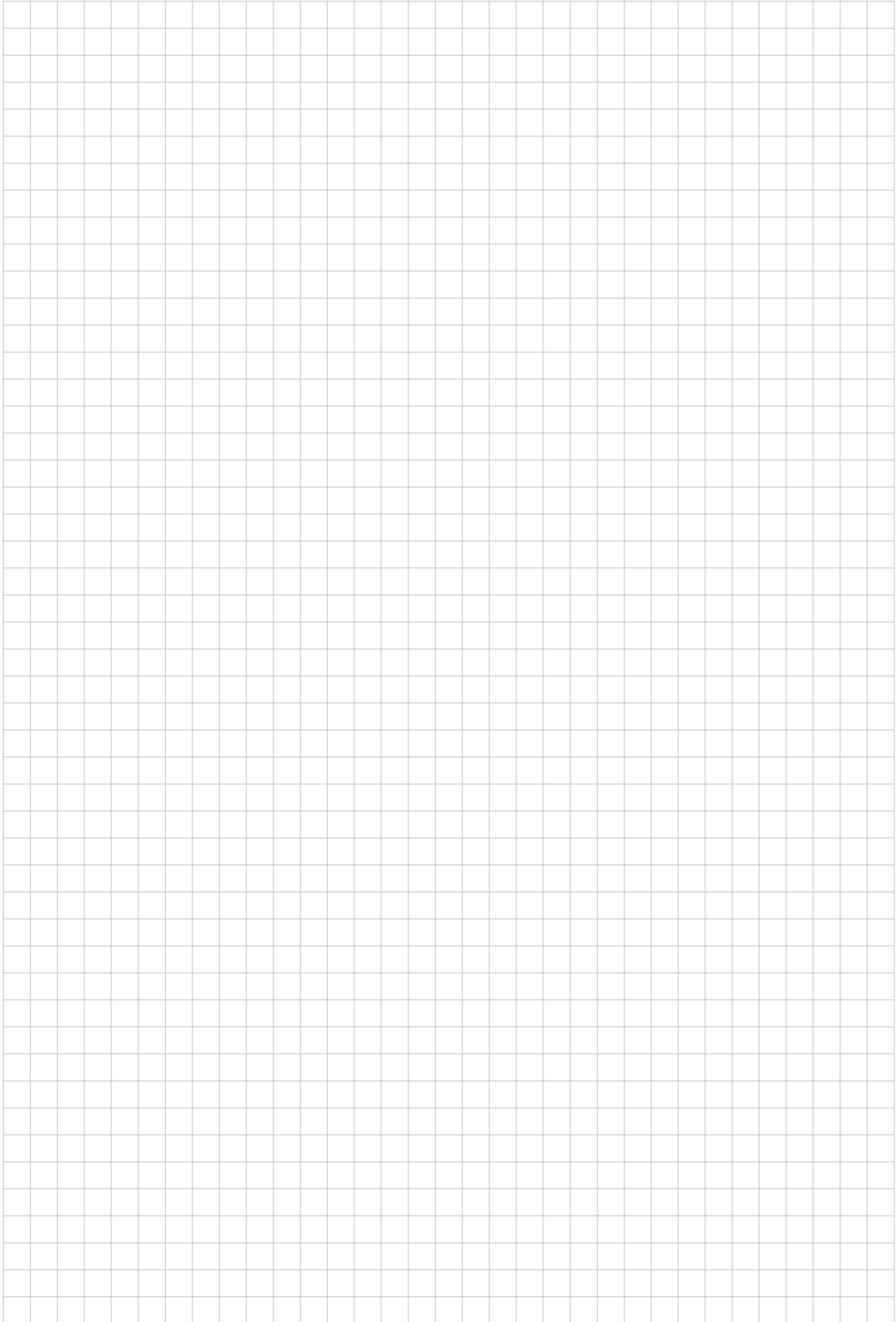
Question 26: Cette question est notée sur 6 points.

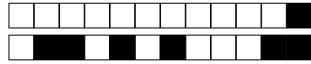
<input type="text"/>	.5	<input type="text"/>	.5	<input type="text"/>	.5	<input type="text"/>	.5	<input type="text"/>	.5	<input type="text"/>	.5	<input type="text"/>	.5
<input type="text"/>	0	<input type="text"/>	1	<input type="text"/>	2	<input type="text"/>	3	<input type="text"/>	4	<input type="text"/>	5	<input type="text"/>	6

Calculer la solution globale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) - y'(t) - 6y(t) = 4e^{-t} \\ y(0) = -2, y'(0) = 3 \end{cases}$$







Question bonus

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées à la correction.

Question 27: Cette question est notée sur 3 points.

<input type="checkbox"/>	.5	<input type="checkbox"/>	.5	<input type="checkbox"/>	.5		
<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	3

Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $D_f = \mathbb{R}^n$, $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée par $\gamma \in C^0(]0, 1[, \Gamma)$ et $g :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g = f \circ \gamma$.

Soient $x_0 \in \Gamma$ et $t_0 \in]0, 1[$ tel que $\gamma(t_0) = x_0$. Montrer que si $f(x_0)$ est un minimum local de f , alors $g(t_0)$ est un minimum local g dans $]0, 1[$.



