EPFL

1

Enseignant·es: Dubuis
Analyse avancée II - PH
– – 2026
Durée : 210 minutes

999999

Cocher la case "Présent·e" ☐ Présent·e ☐ Absent.e

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 28 pages, les dernières pouvant être vides. Le total est de 100 points, partagés sur 27 questions. La question numéro 27 est une question bonus valant 3 points. La note sera calculée sur 97 points.

- Posez votre carte CAMIPRO sur la table et vérifiez votre numéro SCIPER sur la première page. Au démarrage de l'épreuve, coachez la case "Présent·e".
- **Aucun** document n'est autorisé. L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire. Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Si une question est erronée, les enseignant·es se réservent le droit de l'annuler.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie). Les brouillons ne seront pas ramassés. **Ne pas dégrafer.**

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren
☒ ☑ ■	☐	☐

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Formulaire

Trigonométrie circulaire

Formules d'addition :

$$\sin(x+y) = \sin x\ \cos y + \cos x\ \sin y \qquad \cos(x+y) = \cos x\ \cos y - \sin x\ \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\ \tan y}$$

Formules de bissection :

$$\sin^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{2} \qquad \cos^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1+\cos x}{2} \qquad \tan^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

Expressions de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ en fonction de $\tan(\frac{x}{2})$:

$$\sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \tan x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})}$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\cos x + \cos y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \cos x - \cos y = -2\sin(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \sin x - \sin y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

Trigonométrie hyperbolique

Définitions :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Formules d'addition :

$$\sinh(x+y) = \sinh x\ \cosh y + \cosh x\ \sinh y \qquad \cosh(x+y) = \cosh x\ \cosh y + \sinh x\ \sinh y$$

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x\ \tanh y}$$

Formules de bissection :

$$\sinh^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{2} \qquad \cosh^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x + 1}{2} \qquad \tanh(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}$$

Dérivée de quelques fonctions

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arg\sinh x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\arg\cosh x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\arg\tanh x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$

Développement limité de quelques fonctions

$f(x)$	Développement limité de $f(x)$ au voisinage de 0
$\dfrac{1}{1+x}$	$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n \cdot \varepsilon(x)$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \dfrac{\alpha}{1!} x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n \cdot \varepsilon(x)$
e^x	$1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + x^n \cdot \varepsilon(x)$
$\sin x$	$x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1} \cdot \varepsilon(x)$
$\cos x$	$1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n} \cdot \varepsilon(x)$
$\tan x$	$x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + \dfrac{17x^7}{315} + x^7 \cdot \varepsilon(x)$
$\sinh x$	$x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1} \cdot \varepsilon(x)$
$\cosh x$	$1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n} \cdot \varepsilon(x)$
$\tanh x$	$x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} - \dfrac{17x^7}{315} + x^7 \cdot \varepsilon(x)$
$\ln(1+x)$	$x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n} + x^n \cdot \varepsilon(x)$

où $\varepsilon(x)$ est une fonction qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Toutes les questions sur cette page se rapportent à l'énoncé ci-dessous.

Enoncé

Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée par $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\gamma(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t)).$$

Question 1 (3 points)
Soit $f : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x\sqrt{y}$. L'intégrale curviligne $\int_\Gamma f dl$ vaut

- ☐ $-2\sqrt{2}\pi^2$
- ☐ $-2\pi^2$
- ☐ $-\sqrt{2}\pi^2$
- ☐ π^2
- ☐ 0
- ☐ $2\pi^2$
- ☐ $2\sqrt{2}\pi^2$
- ☐ $\sqrt{2}\pi^2$

Question 2 (2 points)
Un vecteur tangent à Γ au point $(\pi, 2)$ est

- ☐ $(-3, 1)$
- ☐ $(1, 2)$
- ☐ $(2, 0)$
- ☐ $(2, -1)$
- ☐ $(1, -3)$
- ☐ $(-1, 2)$
- ☐ $(-1, 1)$
- ☐ $(0, 2)$

Question 3 (2 points)
La longueur de Γ vaut

- ☐ 4
- ☐ 4π
- ☐ 8π
- ☐ 2π
- ☐ 8
- ☐ π
- ☐ 1
- ☐ 2

Toutes les questions sur cette page se rapportent à l'énoncé ci-dessous.

Enoncé

Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2\sin(x^2+y^2)}{1-\cos(\sqrt{x^2+y^2})}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad g(x,y) = x(y+3)^2 + x^2(y+3)$$

Question 4 (2 points)

Soit $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$. La dérivée directionnelle $\dfrac{\partial g}{\partial v}(1,0)$ vaut

- ☐ $-2\sqrt{2}$
- ☐ $2\sqrt{2}$
- ☐ $\sqrt{2}$
- ☐ $-8\sqrt{2}$
- ☐ $-11\sqrt{2}$
- ☐ $-\sqrt{2}$
- ☐ $11\sqrt{2}$
- ☐ $8\sqrt{2}$

Question 5 (3 points)

Soit $h(x,y) = f(x,y) \cdot g(x,y)$ La dérivée partielle $\dfrac{\partial h}{\partial x}(0,0)$ vaut

- ☐ 0
- ☐ 4
- ☐ 9
- ☐ 18
- ☐ 36
- ☐ -36
- ☐ -18
- ☐ -9

Question 6 (2 points)

La limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ vaut

- ☐ 3
- ☐ 2
- ☐ 0
- ☐ 1
- ☐ -2
- ☐ 4
- ☐ -3
- ☐ -1

Toutes les questions sur cette page se rapportent à l'énoncé ci-dessous.

Enoncé

Soient $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(x, y, z) = \cos(\pi x)\sin(\pi y) + \sin(\pi z)$$

Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la surface définie implicitement par

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | F(x, y, z) = 0\right\}.$$

Question 7 (2 points)
L'équation $F(x, y, z) = 0$ défini implicitement au voisinage de $(1, 0, 1)$ une fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi(1, 0) = 1$ et $F(x, y, \varphi(x, y)) = 0$.
La pente de croissance maximale au point $(1, 0, 1)$ du graphe de φ est atteinte dans la direction (sens compris)

- ☐ $(-\pi, 0)$
- ☐ $(0, -1)$
- ☐ $(\pi, 1)$
- ☐ $(1, -\pi)$
- ☐ $(1, 0)$
- ☐ $(-\pi, \pi)$
- ☐ $(-\pi, -\pi)$
- ☐ $(-1, \pi)$

Question 8 (2 points)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = F(x, y, 0)$. L'équation $f(x, y) = 0$ définit implicitement une au voisinage de $(1/2, 1/2)$ une fonction $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\psi(1/2) = 1/2$ et $f(\psi(y), y) = 0$.
La pente de la tangente au graphe de ψ au point $(1/2, 1/2)$ est donné par

- ☐ 0
- ☐ $-\pi$
- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ 1
- ☐ -1
- ☐ $\frac{\pi}{2}$
- ☐ π
- ☐ $-\frac{1}{2}$

Question 9 (2 points)
L'équation du plan tangent à Σ au point $(0, 0, 1)$ est donnée par

- ☐ $x + y + z = 0$
- ☐ $y - z = 1$
- ☐ $x - y + z = 0$
- ☐ $y - z = -1$
- ☐ $x - z = -1$
- ☐ $y + z = 1$
- ☐ $x + z = 0$
- ☐ $x - y = 1$

Toutes les questions sur cette page se rapportent à l'énoncé ci-dessous.

Enoncé

Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par $f(x, y) = 2x^2 - 3y^2$ et $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

Question 10 (2 points)
La valeur maximale de f sous la contrainte $g(x, y) = 0$ est

- ☐ 1
- ☐ -1
- ☐ 3
- ☐ -4
- ☐ -3
- ☐ 4
- ☐ 2
- ☐ -21

Question 11 (2 points)
La valeur minimale de f sous la contrainte $g(x, y) = 0$ est

- ☐ -1
- ☐ -21
- ☐ 2
- ☐ -3
- ☐ 4
- ☐ 1
- ☐ 3
- ☐ -4

Question 12 (2 points)
Le point stationnaire $(0, 0)$ est

- ☐ un point à minimum local.
- ☐ un point selle.
- ☐ un point à maximum local.
- ☐ d'une nature indéterminée

Les questions qui suivent sont indépendantes

Question 13 (3 points)
Soient $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (xyz^2, x+y+z)$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tel que $\nabla g(1,3) = (2,-1)$. Soit finalement $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée comme $h = g \circ f$. Alors $\frac{\partial h}{\partial z}(1,1,1)$ vaut

- ☐ 4
- ☐ -1
- ☐ 5
- ☐ -4
- ☐ 3
- ☐ 2
- ☐ 1
- ☐ -3

Question 14 (3 points)
Soit $f(x,y) = \cos(x+y)(1+\sin(x+y))$. Le polynôme de Taylor de degré 2 de f au voisinage de $(0,0)$ est

- ☐ $p_2(x,y) = 1 + x + y + xy + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$
- ☐ $p_2(x,y) = 1 + x + y - 2xy - x^2 - y^2$
- ☐ $p_2(x,y) = 1 + x + y - xy + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$
- ☐ $p_2(x,y) = 1 + x + y - 2xy + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$
- ☐ $p_2(x,y) = 1 + x + y + xy - x^2 - y^2$
- ☐ $p_2(x,y) = 1 + x + y - xy - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$

Question 15 (3 points)
Pour $t > 0$, on définit

$$F(t) = \int_t^{t^2} \frac{1}{x} e^{tx^2} dx$$

$F'(1)$ vaut

- ☐ $-e$
- ☐ $-2e$
- ☐ e
- ☐ $2e$
- ☐ $3e$
- ☐ $-3e$
- ☐ $-\frac{e}{2}$
- ☐ $\frac{e}{2}$

Question 16 (3 points)
On considère l'intégrale double

$$I = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 \frac{5x}{1+2y^5} dy \right) dx.$$

Alors

- ☐ $I = \dfrac{1}{2}\ln(2)$
- ☐ $I = \dfrac{1}{3}\ln(2)$
- ☐ $I = \dfrac{1}{4}\ln(3)$
- ☐ $I = \ln(3)$
- ☐ $I = \ln(2)$
- ☐ $I = \dfrac{1}{4}\ln(2)$
- ☐ $I = \dfrac{1}{3}\ln(4)$
- ☐ $I = \dfrac{1}{2}\ln(3)$

Deuxième partie, Vrai-Faux

Pour les questions qui suivent, répondre par vrai ou faux.
Pour chaque question, le décompte des points est le suivant :

- 4 bonnes réponses : 4 points
- 3 bonnes réponses : 2 points
- 0 point sinon

Question 17 (4 points)

- Pour toute suite $(x_k)_{k=0}^{+\infty}$ qui converge et pour toute suite $(y_k)_{k=0}^{+\infty}$ bornée,

la suite $(z_k)_{k=0}^{+\infty}$ définie par $z_k = x_k y_k$ admet une sous-suite qui est de Cauchy.

☐ VRAI ☐ FAUX

- Pour toute suite $(x_k)_{k=0}^{+\infty}$ divergente, toutes les composantes de $(x_k)_{k=0}^{+\infty}$ divergent.

☐ VRAI ☐ FAUX

- Si f est une fonction à valeur réelle définie sur $\mathbb{R}^n$ et si $(x_k)_{k=0}^{+\infty}$ est une suite telle que

$\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = a \in \mathbb{R}^n$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} f(x_k)$ existe, alors f admet une limite en a.

☐ VRAI ☐ FAUX

- Pour toute suite $(x_k)_{k=0}^{+\infty}$ qui converge,

la suite réelle $(u_k)_{k=0}^{+\infty}$ définie par $u_k = \sum_{i=1}^{n} x_{k,i}$ converge

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 18 (4 points)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, non vide. Pour tout fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie sur Ω :

• Si $x_0 \in \Omega$ et si f est continue en x_0 et si $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ existe pour tout $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|v\| = 1$,

alors f est différentiable en x_0.

☐ VRAI ☐ FAUX

• Si $f \in C^4(\Omega)$, pour tout $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega$, $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x_1^2 \partial x_2 \partial x_3}(x) = \dfrac{\partial^4 f}{\partial x_3^2 \partial x_2 \partial x_1}(x)$

☐ VRAI ☐ FAUX

• Si les dérivées partielles de f existent pour tout $x \in \Omega$ et si elles sont différentiables en $x_0 \in \Omega$,

alors f est continûment différentiable en x_0.

☐ VRAI ☐ FAUX

• Si $f \in C^0(\Omega)$, et si $\gamma \in C^0(\mathbb{R}, \Omega)$ telle que $\lim\limits_{t \to 0} \gamma(t) = 0_{\mathbb{R}^n}$,

alors pour tout $x_0 \in \Omega$, $\lim\limits_{t \to 0} f(x_0 + \gamma(t)) = f(x_0)$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 19 (4 points)

- Soit l'ensemble $E = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right), n \in \mathbb{N}^* \right\} \subset \mathbb{R}^2$. Le bord de E est $\partial E = E \cup (0,0)$

☐ VRAI ☐ FAUX

- Soit l'ensemble $E = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right), n \in \mathbb{N}^* \right\} \subset \mathbb{R}^2$.

L'ensemble des points d'accumulations de E est $E \cup (0,0)$

☐ VRAI ☐ FAUX

- Pour tous les sous-ensembles $A, B \subset \mathbb{R}^n$, si $A \cup B$ est borné, alors ∂A est borné.

☐ VRAI ☐ FAUX

- L'ensemble $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 1 \text{ et } -1 < xy < 1\}$ est ouvert et borné.

☐ VRAI ☐ FAUX

Troisième partie, questions de type ouvert - démonstration

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées à la correction.

Question 20: *Cette question est notée sur 7 points.*

☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $(x_0, y_0) \in D_f$. Montrer que si f est continûment différentiable en (x_0, y_0), alors f est différentiable en (x_0, y_0).

Question 21: *Cette question est notée sur 7 points.*

☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5
☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction telle que $D_f = \mathbb{R}^n$ et $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$et telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|\nabla f(x)\|_F \leq M.$$

Soit $y \in \mathbb{R}^n$. On considère la suite $(y_k)_{k=0}^{+\infty} \subset \mathbb{R}^n$ définie par

$$y_0 = y, y_k = f(y_{k-1}), k \in \mathbb{N}^*.$$

Soit finalement la suite $(z_k)_{k=0}^{+\infty} \subset \mathbb{R}$ définie par

$$z_k = \|y_k\|.$$

Montrer que si $M < 1$, alors la suite $(z_k)_{k=0}^{+\infty}$ converge.

Question 22: *Cette question est notée sur 10 points.*

☐0 ☐.5 ☐1 ☐.5 ☐2 ☐.5 ☐3 ☐.5 ☐4 ☐.5 ☐5 ☐.5 ☐6 ☐.5 ☐7 ☐.5 ☐8 ☐.5 ☐9 ☐.5 ☐10

Soient $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $\Omega = B(x_0, 1)$. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \in C^2(\Omega)$.

(a) Montrer que si $f(x_0) = 0, \nabla f(x_0) = 0_{\mathbb{R}^n}$ et $H_f(x_0) = O_{\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})}$, alors $f(x) = o(\|x - x_0\|^2)$ pour tout $x \in \Omega$.

(b) Pour $x \in \Omega$, soit $\delta > 0$ et $\gamma :]-\delta, 1+\delta[\to \mathbb{R}^n$ donnée par

$$\gamma(t) = x_0 + t(x - x_0), t \in]-\delta, 1+\delta[.$$

Pour $t \in]-\delta, 1+\delta[$, calculer le développement de Taylor de la fonction $g = f \circ \gamma$ à l'ordre 1 en prenant le soin d'expliciter le reste. Déduire de ce calcul l'expression du développement de Taylor de f en x autour de x_0 à l'ordre 1 ainsi qu'une expression pour le reste.

(c) Déduire du point précédent, que si $H_f(x) = O_{\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})}$ pour tout $x \in \Omega$, alors f est un polynôme de de degré 1.

Quatrième partie, questions de type ouvert - questions calculatoires

Répondre dans l'espace dédié. Vos calculs doivent être soigneusement présentés, toutes les étapes de votre démarche doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées à la correction.

Question 23: *Cette question est notée sur 6 points.*

.5 .5 .5 .5 .5 .5
0 1 2 3 4 5 6

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2\ln(x^4+y^4), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Montrer que f est continûment différentiable en $(0,0)$.

Question 24: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5
☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

Soient $D \subset \mathbb{R}^3$ l'ensemble défini par

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq 2, y \geq 0, x + y \geq 0, 0 \leq z \leq 2\sqrt{x^2 + y^2} - x^2 - y^2 \right\}$$

et $f(x, y, z) = xy$.
Calculer

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz.$$

Question 25: *Cette question est notée sur 6 points.*

.5 .5 .5 .5 .5 .5
0 1 2 3 4 5 6

Calculer la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = ty^3(t) \\ y(1) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Donner l'intervalle maximal sur lequel la solution est définie.

Question 26: *Cette question est notée sur 6 points.*

☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5
☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

Calculer la solution globale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) - y'(t) - 6y(t) = 4e^{-t} \\ y(0) = -2, y'(0) = 3 \end{cases}$$

Question bonus

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées à la correction.

Question 27: *Cette question est notée sur 3 points.*

0 .5 1 .5 2 .5 3

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $D_f = \mathbb{R}^n$, $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée par $\gamma \in C^0(]0,1[, \Gamma)$ et $g :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $g = f \circ \gamma$.

Soient $x_0 \in \Gamma$ et $t_0 \in]0,1[$ tel que $\gamma(t_0) = x_0$. Montrer que si $f(x_0)$ est un minimum local de f, alors $g(t_0)$ est un minimum local g dans $]0,1[$.