Leonid Monin
Léo Navarro Chafloque

EPFL, semestre de printemps 2026
Rings and fields

Exercices – Semaine 12

Exercice 1.
Soit $f = x^3 + ax + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ avec $a > 0$, $a \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que f est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
2. Montrer que f a une racine réelle, mais pas trois.
3. Soit $K = \mathbb{Q}[x]/(f)$. Montrer que $K/\mathbb{Q}$ est une extension de degré 3 qui n'est pas Galoisienne.
4. Soit L le corps de décomposition de f sur $\mathbb{Q}$. Montrer que $\mathrm{Gal}(L/Q) \cong S_3$. (La proposition 4.6.5 (4) est utile pour calculer le cardinal de $\mathrm{Gal}(L/Q)$).

Exercice 2.
Décrivez le groupe $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ dans les cas suivants: $K = \mathbb{Q}(i), \mathbb{Q}(\sqrt{7}), \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}), \mathbb{Q}(\xi)$ où $\xi = e^{2i\pi/3}$.

Exercice 3.
Soit $\xi = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Considérons

$$\mathbb{Q}(\xi, \sqrt[3]{2}) \subseteq \mathbb{C},$$

un corps de décomposition de $x^3 - 2$.

On attire l'attention sur le point (3) de la Proposition 4.6.5. Que le groupe $\mathrm{Gal}(L/K)$ *agit transitivement sur les racines d'un polynôme minimal est un théorème* d'existence. *En effet étant donné des racines* α_1, α_2 *d'un polynôme minimal, la transitivité signifie qu'il existe* $\phi \in \mathrm{Gal}(L/K)$ *tel que* $\phi(\alpha_1) = \alpha_2$.

1. Montrez qu'il existe $\phi \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi, \sqrt[3]{2})/\mathbb{Q})$ tel que $\phi(\xi) = \xi$ et $\phi(\sqrt[3]{2}) = \xi\sqrt[3]{2}$. Quel est l'ordre de ϕ ?
2. Montrez qu'il existe $\psi \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi, \sqrt[3]{2})/\mathbb{Q})$ avec $\psi(\xi\sqrt[3]{2}) = \xi^2\sqrt[3]{2}$ et $\psi(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}$. Quel est l'ordre de ψ ?
3. En utilisant l'action de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi, \sqrt[3]{2})$ sur les racines de $x^3 - 2$ et la Proposition 4.6.5 du cours, déduisez que $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi, \sqrt[3]{2}) \cong S_3$.
4. Raisonnez similairement pour calculer les groupes de Galois des extensions $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ et $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$.

Exercice 4.
Soit K un corps et L un corps de décomposition généré par des éléments séparables. En utilisant la Proposition 4.6.5 du cours montrez que si $\alpha \in L$ alors si l'orbite de α par l'action $\mathrm{Gal}(L/K)$ est de taille $[L : K]$ on a $L = K(\alpha)$.*

Calculez des éléments primitifs pour chacune des extensions apparaissant dans l'exercice 3 en utilisant ce principe.

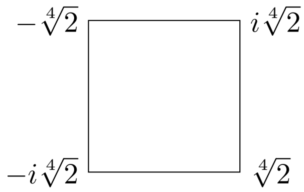
Exercice 5. 1. Montrez que $K = \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$ est le corps de décomposition de $x^4 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$.

2. Montrez qu'il existe $r, s \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ tel que
   (a) $r(\sqrt[4]{2}) = i\sqrt[4]{2}$ et $r(i) = i$, (on pourra utilisez la même méthode que l'exercice 3 pour l'extension $K/\mathbb{Q}(i)$)

*En effet: montrez d'abord en utilisant cette proposition que dans ce cas l'orbite de α est de taille $[K(\alpha) \colon K]$. Ce principe (taille de l'orbite=degré de l'extension) est à retenir dans le cadre de la théorie de Galois.

(b) $s(\sqrt[4]{2}) = -\sqrt[4]{2}$ et $s(i) = -i$.

3. Déduire que si l'on nomme les sommets d'un carré selon les racines de $x^4 - 2$ comme ci-dessous



le groupe $\mathrm{Gal}(K, \mathbb{Q})$ est isomorphe au groupe D_8 des symétries du carré.

4. Donner un élément $\alpha \in K$ avec $\mathbb{Q}(\alpha) = K$.