

**Exercice 1.** Un vecteur non-nul  $\vec{v} = (a_1)$  de  $V_1$  est linéairement indépendant (si  $\lambda \cdot \vec{v} = \vec{0}$ , alors  $\lambda = 0$  car  $a_1 \neq 0$ ) et engendre n'importe quel autre vecteur de  $\mathbb{R}$  (pour  $\vec{w} = (b_1)$ , on a  $\frac{b_1}{a_1} \cdot \vec{v} = \vec{w}$ ). Ainsi, l'ensemble des bases de  $V_1$  est  $V_1 \setminus \{(0)\}$ . La raison pour laquelle on exclut  $(0) = \vec{0}$  est qu'il est impossible de générer un vecteur quelconque avec un multiple de  $(0)$ .

**Exercice 2.**

a) Non, car par exemple le vecteur  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  n'est pas combinaison linéaire des deux vecteurs donnés. En effet,

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ n'a pas de solution.}$$

b) Oui, soit  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  un vecteur quelconque de  $V_2$ , alors l'équation vectorielle  $x \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  admet comme solution  $x = \frac{3a - 2b}{2}$ ,  $y = -\frac{5a - 4b}{4}$ , ce qui prouve que le vecteur quelconque  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  peut s'exprimer comme combinaison linéaire des deux vecteurs donnés.

c) Non car une combinaison linéaire de ces deux vecteurs formera toujours un vecteur de la forme  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$ .

d) Oui, soit un vecteur quelconque  $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$  de  $V_4$ , alors l'équation vectorielle

$$x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

admet comme solution :

$$x = \frac{-d + 3c + b + a}{4}, \quad y = -\frac{-d - c - 3b + a}{4}, \quad z = -\frac{-d - c + b + a}{4}, \quad t = \frac{d - c - b + a}{2},$$

ce qui prouve que le vecteur quelconque  $\vec{v}$  peut s'exprimer comme combinaison linéaire des cinq vecteurs donnés. (On n'a pas pris en compte le quatrième vecteur qui est la somme des deux premiers.)

**Exercice 3.**

a) Ces deux vecteurs sont linéairement indépendants car l'un n'est pas multiple de l'autre; il n'en existe donc pas de combinaison linéaire non-triviale donnant le vecteur nul. Ces 2 vecteurs forment donc une base de  $V_2$  en vertu d'une proposition du cours.

b) Comme  $1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , les deux vecteurs sont colinéaires, et ne peuvent donc pas former une base de  $V_2$ .

c) On a  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , ainsi  $2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Ce calcul nous montre que les trois vecteurs sont linéairement dépendants, ils sont donc coplanaires et ne peuvent ainsi pas former une base de  $V_3$ .

d) De la même manière,  $\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ , ainsi  $5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et donc ces vecteurs ne forment pas une base de  $V_3$ .

e) Comme  $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , les vecteurs ne forment pas une base de  $V_3$ .

- f) Les 3 vecteurs sont linéairement indépendants et par une proposition du cours, ils forment une base de  $V_3$ . Pour voir qu'ils sont linéairement indépendants, résous l'équation vectorielle  $\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ; on obtient bien  $\alpha = \beta = \gamma = 0$  (le vecteur nul ne peut pas être exprimé comme combinaison linéaire non-triviale de ces vecteurs).

**Exercice 4.** On observe que  $2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et donc  $2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ . Ce calcul montre que le vecteur  $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$  appartient au plan formé par  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  puisqu'il s'exprime comme combinaison linéaire de ceux-ci. Ainsi les trois vecteurs sont coplanaires.

**Exercice 5.**

- a) Faux, car une base de  $V_3$  contient toujours trois vecteurs, tandis que dans  $V_2$  trois vecteurs sont toujours linéairement dépendants.
- b) Vrai, car par hypothèse  $(\vec{u}, \vec{v})$  forment une base de  $V_2$ , ils forment donc en particulier un système de générateurs et donc tout vecteur de  $V_2$  peut s'exprimer comme combinaison linéaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Ainsi ajouter un (ou plusieurs) vecteur(s) à la liste ne change pas le fait que c'est un système de générateurs (par contre  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont forcément linéairement dépendants).
- c) Vrai, car le vecteur  $\vec{0}$  est toujours linéairement dépendant de tout autre vecteur, il ne peut donc pas faire partie d'une base.
- d) Faux, si  $\vec{w} = \vec{0}$  alors il n'existe aucun vecteur de  $V_2$  qui ne soit pas colinéaire à  $\vec{w}$  et donc aucune base ne le contenant.
- e) Vrai, en effet soit  $\vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Alors par exemple, le vecteur  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$  est tel que  $(\vec{v}; \vec{w})$  forme une base de  $V_2$ .
- f) Faux, si  $\vec{w} = \vec{0}$  alors il n'existe aucun vecteur de  $V_3$  qui ne soit pas colinéaire à  $\vec{w}$  et donc aucune base ne le contenant.
- g) Vrai, en effet on peut toujours choisir un autre vecteur  $\vec{v}$  de  $V_3$  qui ne soit pas colinéaire à  $\vec{w}$  et un troisième vecteur  $\vec{u}$  non coplanaire au plan formé par  $(\vec{w}; \vec{v})$ , par exemple en prenant  $\vec{u}$  normal à ce plan.
- h) Faux. Voir le point suivant, où même 4 tels vecteurs ne suffisent pas pour engendrer  $V_3$ .
- i) Faux. Par exemple, les vecteurs  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  sont deux à deux linéairement indépendants, mais n'engendreront jamais un vecteur dont la troisième composante est non-nulle. En fait, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , les vecteurs  $\vec{v}_k = \begin{pmatrix} \cos(k\pi/n) \\ \sin(k\pi/n) \\ 0 \end{pmatrix}$  pour  $k = 0, \dots, n-1$  forment une famille de  $n$  vecteurs deux à deux linéairement indépendants qui n'engendrent pas  $V_3$ .