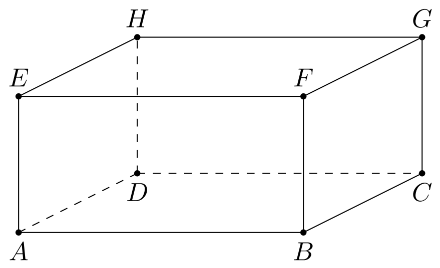


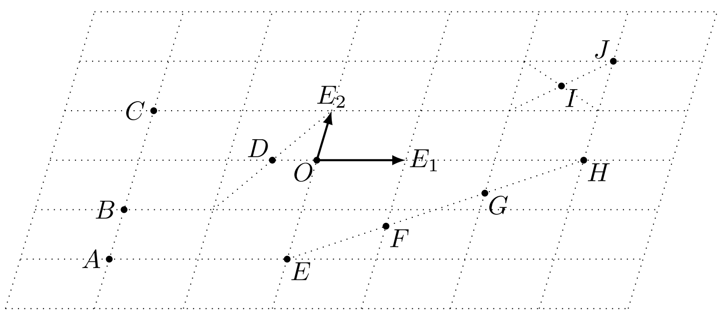
Série 31

Exercice 1. On considère le parallélépipède suivant de sommets A, B, C, D, E, F, G, H.



On construit le milieu M du segment $[DH]$ et le milieu N du segment $[AB]$.
Montre que les vecteurs $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{GF}$ et $\overrightarrow{EB}$ sont coplanaires.

Exercice 2. Coordonnées. Détermine les coordonnées des points $A, B, \ldots, J$ dans le repère formé par l'origine O et la base $(\overrightarrow{OE_1}; \overrightarrow{OE_2})$:



Exercice 3. Soient $A = (a_1; a_2)$, $B = (b_1; b_2)$ et $C = (c_1; c_2)$ trois points de $\mathbb{R}^2$. Démontre que le centre de gravité G du triangle ΔABC est $G = \left(\dfrac{a_1 + b_1 + c_1}{3}; \dfrac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right)$.

Exercice 4. On considère les points $A = (5; 1)$, $B = (-1; 3)$ et $C = (1; -6)$. Calcule les coordonnées du centre de gravité G du triangle ΔABC et contrôle ta solution graphiquement en construisant G à la règle et au compas (sur du papier quadrillé par exemple).

Exercice 5. On considère les points $A = (6; -1)$, $B = (-2; 6)$ et $G = (3; 4)$. Calcule les coordonnées du troisième sommet du triangle ΔABC dont le centre de gravité est G.

Exercice 6. Les points $M = (2; -1)$, $N = (-1; 4)$ et $P(-2; 2)$ sont les milieux des côtés d'un triangle. Calcule les coordonnées de ses sommets.

Exercice 7. On considère les points $A = (0; 2; 4)$, $B = (1; -1; 3)$, $C = (-8; 2; 1)$ et $D = (-6; -4; -1)$ dans $\mathbb{R}^3$. Montre que ces points sont coplanaires. Déduis-en la position relative des droites AB et CD (confondues, parallèles, sécantes ou gauches).
Que peux-tu dire alors de la position relative des droites AB et CE, si $E = (0; -1; 4)$?

Exercice 8. Le centre de gravité d'une pyramide de base quelconque se trouve au quart de la longueur du segment qui joint le sommet au centre de gravité de la base. Calcule les coordonnées du centre de gravité du tétraèdre de sommets $(0; 0; 0)$, $(3; 0; 0)$, $(0; 3; 0)$ et $(0; 0; 3)$.

Exercice 9. Montre que les points $(0; 11; 7)$, $(20; 10; 0)$, $(15; 23; 16)$ et $(15; 2; 19)$ sont les sommets d'un tétraèdre régulier.

Exercice 10. On se donne les points $R = (8; -15)$, $S = (13, -3)$, $T = (5; 12)$ et $U = (-4; 15/2)$.

a) Si M est le milieu de $[ST]$, le quadrilatère $OSMU$ est-il un parallélogramme ? Justifie ta réponse vectoriellement !

b) Quelle est la nature du quadrilatère $RSTU$?

Exercice 11. Démontre que

a) $\vec{u} \bullet \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$;

b) $(a\vec{u}) \bullet \vec{v} = a(\vec{u} \bullet \vec{v})$;

c) $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$;

d) $\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$.

pour tout vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de V_n et tout $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 12. On considère dans le repère canonique du plan le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$. Donne une équation cartésienne de la droite passant par l'origine et de vecteur directeur $\vec{u}$, ainsi qu'une équation cartésienne de la droite perpendiculaire et passant par l'origine. Quelles sont les pentes de ces droites ?

Exercice 13. On donne les points $A = (2; 1)$ et $B = (3; -5)$ de $\mathbb{R}^2$.

a) Représente dans une même figure les sommets de tous les carrés vérifiant que :

   i) $[AB]$ est un côté d'un carré.

   ii) $[AB]$ est une diagonale d'un carré.

b) Détermine ensuite par calcul les coordonnées des différents points de cette figure.

Exercice 14. Vrai ou faux ? Justifie tes réponses !

a) Le produit scalaire de deux vecteurs est toujours positif ou nul.

b) Deux repères différents ont toujours des origines distinctes.

c) **Inégalité de Cauchy-Schwartz.** On a toujours $|\vec{u} \bullet \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$.

d) Si $\vec{u}$ est le vecteur nul, alors $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.

e) Si $\vec{u} \bullet \vec{u} = 0$, alors $\vec{u}$ est le vecteur nul.

f) Pour tout nombre réel λ et entier $n \geq 1$, il existe un vecteur de V_n de norme λ.

g) Pour tout nombre irrationnel $\lambda > 10$ et entier $n \geq 1$, il existe un vecteur de V_n de norme λ.

Exercice 15. Calcule les angles, en degrés(!), entre les vecteurs suivants du plan :

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$; **c)** $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Exercice 16. Calcule les angles, en degrés(!), entre les vecteurs suivants de l'espace :

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; **c)** $\begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$.