

Exercice 1. Wronskien

Pour chacune des paires de fonctions ci-dessous (pour lesquelles on suppose que chaque fonction est solution d'une même EDOL2 homogène), calculer le wronskien $W(t)$, puis déterminer si les fonctions proposées sont linéairement indépendantes sur l'intervalle I donné :

- a) $h_1(t) = e^t, h_2(t) = te^t, I = \mathbb{R}$
- b) $h_1(t) = \cos(t), h_2(t) = \sin(t), I = \mathbb{R}$
- c) $h_1(t) = e^t \cos(t), h_2(t) = te^t \cos(t), I =]0, \frac{\pi}{2}[$
- d) $h_1(t) = te^t, h_2(t) = 2te^t, I = \mathbb{R}$

Correction.

Pour h_1, h_2 , on rappelle que le wronskien est donné par :

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} h_1(t) & h_2(t) \\ h_1'(t) & h_2'(t) \end{pmatrix} = h_1(t)h_2'(t) - h_1'(t)h_2(t).$$

a)

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ e^t & e^t + te^t \end{pmatrix} = e^{2t} + te^{2t} - te^{2t} = e^{2t} \neq 0, \quad \forall t.$$

Les fonctions sont donc linéairement indépendantes.

b)

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1 \neq 0, \quad \forall t.$$

Les fonctions sont donc linéairement indépendantes.

c)

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} e^t \cos(t) & te^t \cos(t) \\ e^t \cos(t) - e^t \sin(t) & e^t \cos(t) + te^t \cos(t) - te^t \sin(t) \end{pmatrix} = e^{2t} \cos^2(t) \neq 0, \quad \forall t \in I =]0, \frac{\pi}{2}[.$$

Les fonctions sont donc linéairement indépendantes.

d)

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} te^t & 2te^t \\ e^t + te^t & 2e^t + 2te^t \end{pmatrix} = 2te^{2t} + 2t^2e^{2t} - 2te^{2t} - 2t^2e^{2t} = 0, \quad \forall t.$$

Les fonctions ne sont pas linéairement indépendantes.

Exercice 2. EDO linéaires d'ordre 2

Pour chacune des équations suivantes, trouver la solution à chaque problème de Cauchy suivant:

- a) $y''(t) + y'(t) - 12y(t) = 0, y(0) = 0, y'(0) = 7$
- b) $y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$
- c) $y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = 0, y(0) = 1, y'(0) = 4$

Correction.

Les équations sont des équations homogènes du second ordre à coefficients constants. On applique la méthode suivante :

1. Calculer le polynôme caractéristique et ses racines $\lambda_{1,2}$ à l'aide du discriminant Δ ou en factorisant.
2. • Si $\Delta > 0$, alors $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ et sont distinctes. Les solutions linéairement indépendantes sont

$$h_1(t) = e^{\lambda_1 t} \text{ et } h_2(t) = e^{\lambda_2 t}.$$

- Si $\Delta = 0$, alors $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ (c'est forcément une racine réelle), alors les solutions linéairement indépendantes sont

$$h_1(t) = e^{\lambda t} \text{ et } h_2(t) = te^{\lambda t}.$$

- Si $\Delta < 0$, alors $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\omega \in \mathbb{C}$ et les solutions linéairement indépendantes sont

$$h_1(t) = e^{\mu t} \cos(\omega t) \text{ et } h_2(t) = e^{\mu t} \sin(\omega t).$$

3. On écrit la solution générale comme $y(t) = c_1 h_1(t) + c_2 h_2(t)$.
4. On détermine les constantes à l'aide des conditions initiales.

Remarque : dans chaque cas, l'intervalle maximale sera \mathbb{R} (toutes les solutions sont définies sur \mathbb{R} , sont infiniment de fois dérivables et satisfont l'équation pour tout $t \in \mathbb{R}$.)

a) $y''(t) + y'(t) - 12y(t) = 0, y(0) = 0, y'(0) = 7$

On calcule le polynôme caractéristique :

$$\lambda^2 + \lambda - 12 = 0.$$

Le discriminant est $\Delta = 1 + 48 = 49 > 0$. Les racines sont données par $\lambda_1 = -4$ ou $\lambda_2 = 3$.

La solution générale est alors $y(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{3t}$, définie pour tout $t \in \mathbb{R}$.

On détermine les constantes en appliquant les conditions initiales : on a

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -4c_1 + 3c_2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

Finalement, la solution particulière est donnée par

$$y(t) = -e^{-4t} + e^{3t}.$$

b) $y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$

On calcule le polynôme caractéristique :

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0.$$

Le discriminant est $\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$. Les racines sont $\lambda_{1,2} = -2 \pm 1 \cdot i$.

La solution générale est alors $y(t) = c_1 e^{-2t} \cos(t) + c_2 e^{-2t} \sin(t)$, définie pour $t \in \mathbb{R}$.

On détermine les constantes en appliquant les conditions initiales : on a

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ -2c_1 + c_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

Finalement, la solution particulière est donnée par

$$y(t) = e^{-2t} \sin(t).$$

c) $y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = 0, y(0) = 1, y'(0) = 4$

On calcule le polynôme caractéristique :

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0.$$

Le discriminant est $\Delta = 36 - 36 = 0$. La racine double est $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$.

La solution générale est alors $y(t) = c_1e^{3t} + c_2te^{3t}$.

On détermine les constantes en appliquant les conditions initiales : on a

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ 3c_1 + c_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

Finalement, la solution particulière est donnée par

$$y(t) = (1 + t)e^{3t}.$$

Exercice 3. Oscillateur harmonique

Pour $\omega \neq 0$, on considère les équations différentielles ordinaires suivantes :

a) $y''(t) - \omega^2y(t) = 0$.

b) $y''(t) + \omega^2y(t) = 0$.

Trouver la solution générale de chaque équation.

Remarque : le cas b) est l'équation d'un oscillateur harmonique, comme vue dans le cours de physique :) Dans l'exercice 2 de la série 12-B, on avait donné (sans démonstration) la solution. Ici nous montrons comment l'obtenir par le calcul.

Correction.

a) On calcule le polynôme caractéristique : $\lambda^2 - \omega^2 = (\lambda - \omega)(\lambda + \omega)$. Les racines sont données par $\lambda_{1,2} = \pm\omega$ et donc la solution générale est

$$y(t) = c_1e^{\omega t} + c_2e^{-\omega t}.$$

b) On calcule le polynôme caractéristique : $\lambda^2 + \omega^2 = (\lambda + i\omega)(\lambda - i\omega)$. Les racines sont $\lambda_{1,2} = \pm i\omega = 0 \pm i\omega$. La solution générale est donc donnée par

$$y(t) = c_1e^{0t} \cos(\omega t) + c_2e^{0t} \sin(\omega t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t).$$

Remarque : on peut également procéder en calculant le discriminant pour trouver les racines.

Remarque : dans chaque cas, l'intervalle maximale sera \mathbb{R} (toutes les solutions sont définies sur \mathbb{R} , sont infiniment de fois dérivables et satisfont l'équation pour tout $t \in \mathbb{R}$.)

Exercice 4. EDO linéaires d'ordre 2

Pour chacune des équations suivantes : trouver les deux solutions $h_1(t)$ et $h_2(t)$ de l'équation homogène; trouver une solution particulière puis écrire la solution générale.

a) $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = e^{3t}$

b) $y''(t) - 3y'(t) = e^{3t}$

c) $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 2t + t^2$

d) $y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = e^{-t} \cos(t)$

e) $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 8e^{-t}$

f) $y''(t) + 4y(t) = \sin(2t)$

Correction.

Pour chaque équation, $y'' + ay' + by = q$, il s'agit de répéter la méthode suivante :

1. Calculer le polynôme caractéristique et ses racines. Trouver les deux solutions linéairement indépendantes h_1, h_2 de l'équation homogène.
2. Ecrire la solution générale correspondante $y_{hom} = c_1 h_1 + c_2 h_2$ de l'équation homogène.
3. Rechercher la solution particulière y_{part} à l'aide de la méthode des coefficients indéterminés. On écrit le membre de droite $q(t)$ comme

$$q(t) = e^{rt} \cos(\theta t)P(t) + e^{rt} \sin(\theta t)Q(t) \text{ avec } P, Q \text{ des polynômes.}$$

On cherche y_{part} comme

$$y_{part}(t) = t^s e^{rt} \cos(\theta t)R(t) + t^s e^{rt} \sin(\theta t)S(t)$$

où R, S sont des polynômes tels que $\deg R = \deg S = \max(\deg P, \deg Q)$ et s est le plus petit s tel que $t^s e^{rt} \cos(\theta t)$ n'est pas solution du problème homogène, ce qui est équivalent à demander que y_{part} n'appartienne pas en tout cas pas à $\text{span}(h_1, h_2)$.

4. Donner la solution générale comme $y = y_{part} + y_{hom}$
5. Dans chaque cas ici, l'intervalle maximale sera \mathbb{R} (toutes les solutions sont définies sur \mathbb{R} infiniment de fois dérivables et satisfont l'équation pour tout $t \in \mathbb{R}$.)

a) $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = e^{3t}$

Polynôme caractéristique : $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$ ou $\lambda_2 = -2$.

Les solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène sont

$$h_1(t) = e^t, \quad h_2(t) = e^{-2t}$$

et donc

$$y_{hom}(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}.$$

On écrit $q(t) = e^{3t} = e^{rt} \cos(\theta t)P(t) + e^{rt} \sin(\theta t)Q(t)$ avec $r = 3, \theta = 0, P = 1$. Comme $\theta = 0$, il n'y aura pas à déterminer S , on ne s'occupe donc pas de Q . Le plus petit s tel que $t^s e^{3t}$ n'est pas solution de l'équation homogène est $s = 0$, car e^{3t} ne peut pas s'écrire comme une combinaison linéaire de e^t et e^{-2t} . On cherche alors une solution particulière sous la forme $y_{part}(t) = R(t)e^{3t}$; avec $\deg R = \deg P = 0$, d'où $R(t) = C$ une constante et on cherche finalement $y_{part}(t) = Ce^{3t}$.

On a $y'_{part}(t) = 3Ce^{3t}$ et $y''_{part}(t) = 9Ce^{3t}$. En remplaçant dans l'équation $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = e^{3t}$, on a

$$9Ce^{3t} + 3Ce^{3t} - 2Ce^{3t} = e^{3t}.$$

Donc, on obtient $10Ce^{3t} = e^{3t}$ et on a alors $C = 1/10$. La solution générale est alors

$$y(t) = y_{part}(t) + y_{hom}(t) = \frac{e^{3t}}{10} + c_1 e^t + c_2 e^{-2t}.$$

b) $y''(t) - 3y'(t) = e^{3t}$

Polynôme caractéristique : $\lambda^2 - 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$ ou $\lambda_2 = 3$.

Les solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène sont

$$h_1(t) = 1, \quad h_2(t) = e^{3t}$$

et donc

$$y_{hom}(t) = c_1 + c_2 e^{3t}.$$

On écrit $q(t) = e^{3t} = e^{rt} \cos(\theta t)P(t) + e^{rt} \sin(\theta t)Q(t)$ avec $r = 3, \theta = 0, P = 1$. Comme $\theta = 0$, il n'y aura pas à déterminer S , on ne s'occupe donc pas de Q . Le plus petit s tel que $t^s e^{3t}$ n'est pas solution de l'équation homogène est $s = 1$, car e^{3t} est une solution de l'équation homogène. Ici on cherche alors une solution particulière sous la forme $y_{part}(t) = R(t)t e^{3t}$ avec $\deg R = \deg P = 0$ d'où $R(t) = C$ une constante et finalement $y_{part}(t) = C t e^{3t}$.

On a $y'_{part}(t) = C e^{3t}(1 + 3t)$ et $y''_{part}(t) = C e^{3t}(6 + 9t)$. En remplaçant dans l'équation $y''(t) - 3y'(t) = e^{3t}$, on a

$$C e^{3t} (6 + 9t - 3(1 + 3t)) = e^{3t}.$$

Donc, on obtient $3C e^{3t} = e^{3t}$ et on a alors $C = 1/3$. La solution générale est donnée par

$$y(t) = y_{part}(t) + y_{hom}(t) = \frac{1}{3} t e^{3t} + c_1 + c_2 e^{3t}.$$

c) $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 2t + t^2$

Polynôme caractéristique : $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3, \lambda_2 = -1$. Les solutions de l'équation homogène sont

$$h_1(t) = e^{-3t}, \quad h_2(t) = e^{-t}$$

et donc

$$y_{hom}(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-t}.$$

On écrit $q(t) = 2t + t^2 = e^{rt} \cos(\theta t)P(t) + e^{rt} \sin(\theta t)Q(t)$ avec $r = 0, \theta = 0, P(t) = 2t + t^2$. Comme $\theta = 0$, il n'y aura pas à déterminer S , on ne s'occupe donc pas de Q . Le plus petit s tel que t^s n'est pas solution de l'équation homogène est $s = 0$, car $t^0 e^{0t} \cos(0t) = 1$ n'est pas une combinaison linéaire de h_1 et h_2 . On cherche alors y_{part} comme $y_{part}(t) = t^0 R(t) e^{0t} \cos(0t) = R(t)$ avec $\deg R = \deg P = 2$, d'où $y_{part}(t) = at^2 + bt + c$. En remplaçant dans l'équation $y'' + 4y' + 3y = 2t + t^2$, on a

$$2a + 8at + 4b + 3at^2 + 3bt + 3c = 2t + t^2.$$

On doit donc résoudre

$$3a = 1 \quad 8a + 3b = 2 \quad 2a + 4b + 3c = 0$$

d'où

$$a = \frac{1}{3}, b = -\frac{2}{9}, c = \frac{2}{27}.$$

D'où $y_{part}(t) = \frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{9}t + \frac{2}{27}$. La solution générale est donnée par

$$y(t) = y_{part}(t) + y_{hom}(t) = \frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{9}t + \frac{2}{27} + c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-t}.$$

d) $y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = e^{-t} \cos(t)$

Polynôme caractéristique : $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm i \cdot 1$.

Les solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène sont

$$h_1(t) = e^t \cos(t), \quad h_2(t) = e^t \sin(t)$$

et donc

$$y_{hom}(t) = c_1 e^t \cos(t) + c_2 e^t \sin(t).$$

On écrit $q(t) = e^{-t} \cos(t) = e^{rt} \cos(\theta t)P(t) + e^{rt} \sin(\theta t)Q(t)$ avec $r = -1, \theta = 1, P = 1, Q = 0$. Le plus petit s tel que $t^s e^{-t} \cos(t)$ n'est pas solution de l'équation homogène est $s = 0$, car $e^{-t} \cos(t)$ n'est pas combinaison linéaire de h_1 et h_2 . Donc on cherche $y_{part}(t) = R(t)e^{-t} \cos(t) +$

$S(t)e^{-t}\sin(t)$ avec $\deg R = S = 0$ d'où $R(t) = C_1$ et $S(t) = C_2$, avec C_1, C_2 des constantes. On cherche y_{part} alors comme

$$y_{part}(t) = C_1 e^{-t} \cos(t) + C_2 e^{-t} \sin(t).$$

On a

$$y'_{part}(t) = e^{-t}((-C_1 + C_2) \cos(t) + (-C_2 - C_1) \sin(t))$$

et

$$y''_{part}(t) = e^{-t}(-2C_2 \cos(t) + 2C_1 \sin(t)).$$

En remplaçant dans l'équation $y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = e^{-t} \cos(t)$, on a

$$e^{-t}((-2C_2 + 2C_1 - 2C_2 + 2C_1) \cos(t) + (2C_1 + 2C_2 + 2C_1 + 2C_2) \sin(t)) = e^{-t} \cos(t).$$

Donc, on obtient $4C_1 - 4C_2 = 1$ et $4C_1 + 4C_2 = 0$. Les solutions sont $C_1 = 1/8$ et $C_2 = -1/8$. La solution particulière est

$$y_{part}(t) = e^{-t} \left(\frac{1}{8} \cos(t) - \frac{1}{8} \sin(t) \right).$$

La solution générale est

$$y(t) = y_{part}(t) + y_{hom}(t) = \frac{1}{8} e^{-t} \cos(t) - \frac{1}{8} e^{-t} \sin(t) + c_1 e^t \cos(t) + c_2 e^t \sin(t)$$

e) $y'' + 2y' + y = 8e^{-t}$

Polynôme caractéristique : $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

Les solutions linéairement indépendantes sont

$$h_1(t) = c_1 e^{-t}, \quad h_2(t) = c_2 t e^{-t}$$

et la solution de l'équation homogène est

$$y_{hom}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}.$$

On écrit $q(t) = 8e^{-t} = e^{rt} \cos(\theta t) P(t) + e^{rt} \sin(\theta t) Q(t)$ avec $r = -1, \theta = 0, P = 8$. Comme $\theta = 0$, il n'y aura pas à déterminer S , on ne s'occupe donc pas de Q . Le plus petit s tel que $t^s e^{-t}$ n'est pas solution homogène est $s = 2$, comme $t e^{-t}$ est une des solutions homogènes. Donc on cherche $y_{part}(t) = R(t) t^2 e^{-t}$ avec $R(t)$ de degré $\deg P = 0$, donc une constante. On cherche une solution particulière du problème sous la forme : $y_{part}(t) = C t^2 e^{-t}$. On a

$$y'_{part}(t) = \alpha e^{-t}(2t - t^2), \quad y''_{part}(t) = \alpha e^{-t}(2 - 4t + t^2)$$

et en remplaçant dans l'équation on obtient

$$C e^{-t}(2 - 4t + t^2 + 2(2t - t^2) + t^2) = 8e^{-t} \Rightarrow C = 4.$$

D'où $y_{part}(t) = 4t^2 e^{-t}$ et la solution générale est

$$y(t) = y_{part}(t) + y_{hom}(t) = 4t^2 e^{-t} + c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} = (4t^2 + c_2 t + c_1) e^{-t}.$$

f) $y''(t) + 4y(t) = \sin(2t)$

Polynôme caractéristique : $\lambda^2 + 4 = (\lambda - 2i)(\lambda + 2i) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2i, \lambda_2 = -2i$.

Les solutions de l'équation homogène sont

$$h_1(t) = \cos(2t), \quad h_2(t) = \sin(2t)$$

et la solution générale de l'équation homogène est

$$y_{hom}(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t).$$

On écrit $q(t) = \sin(2t) = e^{rt} \cos(\theta t)P(t) + e^{rt} \sin(\theta t)Q(t)$ avec $r = 0, \theta = 2, P = 0, Q = 1$. Le plus petit s tel que $t^s \cos(2t)$ n'est pas solution de l'équation homogène est $s = 1$. On cherche alors $y_{part}(t) = R(t)t \cos(t) + S(t)t \sin(t)$ avec R, S des polynôme de degré 0 car $\deg P = \deg Q = 0$, donc des constantes. On cherche donc y_{part} comme

$$y_{part}(t) = C_1 t \cos(2t) + C_2 t \sin(2t).$$

On a

$$y'_{part}(t) = C_1 \cos(2t) - 2C_1 t \sin(2t) + C_2 \sin(2t) + C_2 2t \cos(2t)$$

et

$$y''_{part}(t) = -4C_1 \sin(2t) - 4C_1 t \cos(2t) + 4C_2 \cos(2t) - 4C_2 t \sin(2t).$$

En remplaçant dans l'équation, on trouve

$$-4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t) = \sin(2t)$$

d'où $C_1 = -\frac{1}{4}$ et $C_2 = 0$ et donc $y_{part}(t) = -\frac{1}{4}t \cos(2t)$. D'où la solution générale

$$y(t) = y_{part}(t) + y_{hom}(t) = -\frac{1}{4}t \cos(2t) + c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t).$$

Exercice 5. Problème de Cauchy

Trouver la solution du problème de Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = 1 + 2e^t - 4e^{-t} + 2 \cos(t), \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Indication : Commencer par chercher la solution homogène y_h , puis quatre solutions particulières y_i des équations $y'' - 4y' + 3y = q_i$, pour $q_1(t) = 1, q_2(t) = 2e^t, q_3(t) = -4e^{-t}$ et $q_4(t) = 2 \cos(t)$. Par linéarité, la solution générale sera $y = y_h + y_1 + y_2 + y_3 + y_4$.

Correction.

On va résoudre l'équation en "puzzle".

1. On cherche la solution générale y_{hom} du problème homogène : $y'' - 4y' + 3y = 0$
2. On cherche une solution particulière y_i de $y'' - 4y' + 3y = q_i$ avec $q_1(t) = 1, q_2(t) = 2e^t, q_3(t) = -4e^{-t}, q_4(t) = 2 \cos(t)$.
3. La solution générale sera

$$y = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_{hom}$$

4. Finalement on appliquera les conditions initiales

Polynôme caractéristique : $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$.
 Les solutions du problème homogène sont

$$h_1(t) = e^t, h_2(t) = e^{3t}$$

et donc

$$y_{hom}(t) = c_1 h_1(t) + c_2 h_2(t) = c_1 e^t + c_2 e^{3t}.$$

L'idée derrière la méthode des coefficients indéterminés est pour chaque q_i , de rechercher y_i de la forme de q_i mais qui ne soit pas combinaison linéaire de h_1 et h_2 , en corrigeant par des puissances de t si nécessaire. On peut évidemment aussi écrire pour chaque q_i :

$$q_i(t) = e^{rt} \cos(\theta t) P(t) + e^{rt} \sin(\theta t) Q(t)$$

et déterminer r, θ, P, Q et écrire

$$y_i = t^s e^{rt} \cos(\theta t) R(t) + t^s e^{rt} \sin(\theta t) S(t)$$

avec le s, R, S correspondants.

On pose

- a) Pour $q_1 = 1, y_1(t) = C_1$
- b) Pour $q_2(t) = 2e^t, y_2(t) = C_2 t e^t$
- c) Pour $q_3(t) = -4e^{-t}, y_3(t) = C_3 e^{-t}$
- d) Pour $q_4(t) = 2 \cos(t), y_4(t) = C_4 \cos(t) + C_5 \sin(t)$

En remplaçant pour chaque $i = 1, 2, 3, 4$, dans l'équation $y_i'' - 4y_i' + 3y_i = q_i$, on trouve

$$C_1 = \frac{1}{3}, C_2 = -1, C_3 = -\frac{1}{2}, C_4 = \frac{1}{5}, C_5 = -\frac{2}{5}.$$

La solution générale est donc:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) + y_4(t) + y_{hom}(t) = \frac{1}{3} - t e^t - \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{5} \cos(t) - \frac{2}{5} \sin(t) + c_1 e^t + c_2 e^{3t}.$$

L'intervalle maximale est \mathbb{R} . On applique les conditions initiales pour déterminer c_1 et c_2 . On a :

$$y(0) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = -\frac{1}{30}$$

et

$$y'(0) = -1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{5} + c_1 + 3c_2 = 1 \Rightarrow c_1 + 3c_2 = \frac{19}{10}$$

d'où $c_1 = -1$ et $c_2 = \frac{29}{30}$ et finalement

$$y(t) = \frac{1}{3} - t e^t - \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{5} \cos(t) - \frac{2}{5} \sin(t) - e^t + \frac{29}{30} e^{3t}.$$

Exercice 6. Facultatif - Un modèle de déformation de structure - déformation d'un pont



Figure 1: Le Pont de Dalvazza

Cet exercice présente l'application des EDO à un problème de structure, ici la déformation d'un pont. Les données de l'exercice ont été fournies par le Professeur Numa Bertola, qui a fait ses études en Génie Civil à l'EPFL et a travaillé sur la structure de plusieurs ponts de Suisse.

Le Pont de Dalvazza (aux Grisons) a été construit en 1924, sous la direction de l'ingénieur civil Nicolas Hartmann, et est l'unique pont en béton armé construit selon le système de poutres Vierendeel en Suisse.

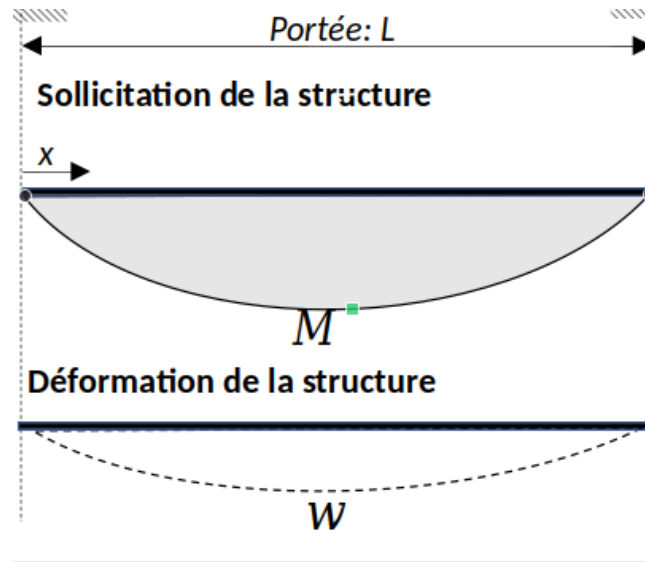


Figure 2: Représentation schématique du pont

La forme parabolique du pont contrecarre les contraintes et la déformation de la structure (qui ont un profil parabolique aussi) tout en minimisant la quantité de matériaux nécessaires (aux extrémités, les contraintes et la déformation sont moindres).

Le modèle avancé pour calculer la déformation du pont est le suivant.

On modélise le pont comme une poutre dans l'intervalle $[0, L]$, où L est la longueur du pont. La déformation $w(x)$, $x \in]0, L[$, mesurée en mètre, est sujette à l'équation

$$w''(x) = M(x)$$

où M est le moment de flexion, c'est-à-dire l'effet des charges verticales sur la structure, donné par

$$M(x) = \frac{1}{EI}(g + q)\frac{x}{2}(L - x)$$

où EI est la rigidité du pont ($[N \times m^2]$), q la charge linéaire passant sur le pont (camion, etc..) et g la charge linéaire du pont lui-même ($[N/m]$).

On impose finalement que le pont est fixe aux extrémités, c'est-à-dire $w(0) = w(L) = 0$, ce qui amène à résoudre le problème

$$\begin{cases} w''(x) = \frac{1}{EI}(g + q)\frac{x}{2}(L - x), & x \in]0, L[, \\ w(0) = w(L) = 0. \end{cases}$$

Ce problème n'est pas un problème dit de Cauchy ou à valeurs initiales. Plutôt que d'imposer w et w' en un point, on va imposer w en deux points, pour déterminer les constantes d'intégration. On appelle cela un problème aux conditions aux limites, et $w(0) = w(L) = 0$ les conditions aux limites ou les conditions de bords. Vous apprendrez à résoudre plus généralement dans la suite de vos études ce genre de problème. En résolvant cette équation, on peut trouver $w(x)$ et en particulier la déformation maximum qui aura lieu au centre du pont, et par conséquent établir la structure de poutres nécessaire pour compenser cette dernière.

En procédant par intégration directe, chercher la solution générale de l'équation, puis appliquer les conditions aux bords pour déterminer l'unique solution de ce modèle.

Correction.

Pour résoudre le problème

$$\begin{cases} w''(x) = \frac{1}{EI}(g+q)\frac{x}{2}(L-x), & x \in]0, L[, \\ w(0) = w(L) = 0, \end{cases}$$

on procède par intégration directe :

$$w''(x) = \frac{1}{EI}(g+q)\frac{x}{2}(L-x) \Leftrightarrow w''(x) = \frac{g+q}{EI} \left(\frac{L}{2}x - \frac{x^2}{2} \right) \Leftrightarrow w'(x) = \frac{g+q}{EI} \left(\frac{L}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \right) + C_1, C_1 \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$w(x) = \frac{g+q}{12EI} \left(Lx^3 - \frac{x^4}{2} \right) + C_1x + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

En appliquant les conditions $w(0) = 0$ et $w(L) = 0$, on obtient

$$\frac{g+q}{12EI} \frac{L^4}{2} + C_1L + C_2 = 0 \text{ et } C_2 = 0.$$

D'où $C_1 = -\frac{g+q}{24EI}L^3$ et donc la solution est finalement

$$w(x) = \frac{g+q}{12EI} \left(Lx^3 - \frac{x^4}{2} - \frac{L^3}{2}x \right).$$

Exercice 7. Facultatif - Chute libre amortie - un exemple d'équation différentielle non linéaire

Considérons un objet ponctuel de masse m que l'on lâche depuis une altitude $y = y_0$, et qui tombe vers le sol. L'axe y est orienté du ciel vers le sol. L'objet est soumis à deux forces, son poids mg et une force de freinage quadratique due aux frottements de l'air $-kv^2(t)$, proportionnelle au carré de la vitesse $v(t) = y'(t)$ de l'objet. Le coefficient k modélise l'intensité de la force de frottement fluide. La seconde loi de Newton fournit l'équation différentielle ordinaire suivante, à laquelle nous ajoutons les conditions initiales (objet lâché à une altitude $y = y_0$ sans vitesse initiale au temps $t = 0$):

$$\begin{cases} my''(t) = -k(y'(t))^2 + mg, \\ y(0) = y_0, \\ y'(0) = v(0) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

- Réécire cette équation du second ordre en une équation du premier ordre en introduisant la fonction $v(t) = y'(t)$.
- Résoudre la nouvelle équation pour obtenir $v(t)$. Indication : $\int \frac{du}{1-u^2} = \operatorname{argth}(u)$.
- Intégrer la vitesse pour obtenir la position $y(t)$, en prenant en compte la condition initiale.
- Quel est le comportement de la vitesse quand $t \rightarrow \infty$? Quelle différence avec la chute libre non-amortie?

Correction.

- La substitution donne l'équation différentielle suivante: $mv'(t) + kv^2(t) = mg$, ce qui est une équation du premier ordre à variables séparées que l'on peut récrire comme

$$\frac{v'(t)}{g - \frac{k}{m}v^2(t)} = 1.$$

b) Pour résoudre, on sépare les variables en écrivant $v' = \frac{dv}{dt}$ et on obtient

$$\frac{dv}{g - (k/m)v^2} = dt \rightsquigarrow \frac{1}{g} \int \frac{dv}{1 - \frac{k}{mg}v^2} = \int dt.$$

On procède par changement de variable en posant $u = \sqrt{\frac{k}{mg}}v$, de sorte que $du = \sqrt{\frac{k}{mg}}dv$.

$$\frac{1}{g} \int \frac{dv}{1 - \frac{k}{mg}v^2} = \frac{1}{g} \sqrt{\frac{mg}{k}} \int \frac{du}{1 - u^2} = \sqrt{\frac{m}{kg}} \operatorname{argth}(u) = \sqrt{\frac{m}{kg}} \operatorname{argth} \left(\sqrt{\frac{k}{mg}}v \right).$$

D'autre part,

$$\int dt = t + C,$$

où C est une constante d'intégration que l'on déterminera à l'aide de la condition initiale. Il ne reste plus qu'à inverser la relation pour obtenir v en fonction de t :

$$\sqrt{\frac{m}{kg}} \operatorname{argth} \left(\sqrt{\frac{k}{mg}}v \right) = t + C \Rightarrow v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \operatorname{th} \left(\sqrt{\frac{gk}{m}}(t + C) \right).$$

La condition initiale donne:

$$v(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

On conclut:

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \operatorname{th} \left(\sqrt{\frac{gk}{m}}t \right).$$

c) Pour trouver une primitive de th , il suffit de remarquer que

$$\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{\frac{d}{dx} \operatorname{ch}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{d}{dx} \ln \operatorname{ch}(x).$$

On a alors:

$$y(t) - y(0) = \int_0^t v(t') dt' = \int_0^t \sqrt{\frac{mg}{k}} \operatorname{th} \left(\sqrt{\frac{gk}{m}}t' \right) dt'.$$

On pose $\sqrt{\frac{gk}{m}}t' = x$, $dt' = \sqrt{\frac{m}{gk}}dx$,

$$y(t) - y_0 = \sqrt{\frac{mg}{k}} \sqrt{\frac{m}{gk}} \int_0^{\sqrt{\frac{gk}{m}}t} \operatorname{th}(x) dx = \frac{m}{k} [\ln \operatorname{ch}(x)]_0^{\sqrt{\frac{gk}{m}}t} = \frac{m}{k} \ln \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{gk}{m}}t \right).$$

On conclut:

$$y(t) = y_0 + \frac{m}{k} \ln \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{gk}{m}}t \right).$$

d) Comme $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{th}(x) = 1$, on a $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = v_\infty = \sqrt{mg/k}$. La vitesse tend vers une constante, ce qui n'est pas le cas lors de la chute libre, où la vitesse augmente linéairement avec le temps.

e) (Bonus, en lien avec le cours de Physique) Analyse des résultats.

La solution trouvée présente 2 régimes différents. Posons le temps caractéristique : $\tau = \sqrt{\frac{m}{gk}}$. Tout d'abord, au début de l'expérience, quand $t \ll \tau$ ($t \rightarrow 0$), comme la vitesse initiale est nulle, la force de frottement est très faible et le mouvement prend les caractéristiques de la chute

libre, c'est à dire vitesse linéaire et position quadratique en temps. Nous pouvons vérifier cela en utilisant les développements limités usuels en zéro:

$$\operatorname{th}(t/\tau) \sim t/\tau$$

et

$$\ln \operatorname{ch}(t/\tau) \sim t^2/2\tau^2.$$

En simplifiant, on obtient, pour $t \ll \tau$,

$$v(t) \sim gt,$$

$$y(t) \sim y_0 + \frac{1}{2}gt^2.$$

À l'inverse, après un temps long $t \gg \tau$ ($t \rightarrow \infty$), nous atteignons un régime stationnaire où la force de frottement est grande et compense entièrement la force de gravité. On remarque qu'il suffit de prendre l'accélération nulle ($v'(t) = 0$, soit équilibre des forces) dans l'équation différentielle pour obtenir la vitesse v_∞ du régime permanent. La force de notre calcul nous permet d'avoir une formule analytique $v(t)$ qui reproduit les comportements aux limites, tout en nous donnant des informations sur la vitesse et la position entre ces temps limites.

On peut aussi donner un sens à l'hypothèse classique "Nous négligeons les frottements de l'air". Dans ce cas spécifique, cela revient à dire que nous menons une expérience sur un intervalle de temps court, disons de $t = 0$ à $t = T \ll \tau$, sur lequel les effets de la force de frottement n'ont pas le temps de se manifester.

Exercice 8. Exercices de révision - EDO à variables séparables et linéaires d'ordre 1

Résoudre les équations différentielles avec valeurs initiales suivantes :

- a) $y'(t) = \frac{t}{y^2(t)}, y(1) = 1.$
- b) $y'(t) - 2y(t) = \sin(3t), y(0) = 0.$
- c) $y'(t) - 2y(t) = t^3 - 2t^2 + t, y(0) = 0.$
- d) $y'(t) + y(t) = t^2 e^{-t}, y(-1) = 2.$
- e) $y'(t) + \tan(t)y(t) = \cos(t), t \in]0, \frac{\pi}{2}[, y(\frac{\pi}{4}) = 1.$

Correction.

- a) $y'(t) = \frac{t}{y^2(t)}, y(1) = 1.$

On procède par séparation des variables :

$$y' = \frac{t}{y^2} \rightsquigarrow y^2 y' = t \rightsquigarrow \int y^2 dy = \int t dt \rightsquigarrow \frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{2}t^2 + C$$

d'où

$$y(t) = \sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 + C}.$$

Ici il est plus simple de chercher l'intervalle maximal une fois la condition initiale prise en compte. Comme $y(1) = 1$, on trouve $C = -\frac{1}{2}$. La solution est donc

$$y(t) = \sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}}$$

définie sur l'intervalle maximal $t \in]\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty[$. Pour trouver ce dernier, on a résolu

$$\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2} \neq 0 \Leftrightarrow t \neq -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3},$$

ceci afin de garantir que $y(t) \neq 0$ et en même temps la dérivabilité de $y(t)$. Comme 1 doit appartenir à l'intervalle maximale, on choisit $]\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty[$.

b) $y'(t) - 2y(t) = \sin(3t), y(0) = 0.$

L'équation est linéaire, du premier ordre. On procède par étape :

Etape 1 : solution générale de l'équation homogène On calcule en séparant les variables :

$$y_{hom} = Ce^{2t}, t \in \mathbb{R}.$$

Etape 2 : recherche de la solution particulière On cherche $y_{part}(t) = C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t)$. En remplaçant dans l'équation, on trouve

$$-3C_1 \sin(3t) + 3C_2 \cos(3t) - 2C_1 \cos(3t) - 2C_2 \sin(3t) = \sin(3t).$$

D'où

$$-3C_1 - 2C_2 = 1 \text{ et } -2C_1 + 3C_2 = 0$$

ce qui donne $C_1 = \frac{-3}{13}$ et $C_2 = \frac{-2}{13}$ et donc

$$y_{part}(t) = -\frac{3}{13} \cos(3t) - \frac{2}{13} \sin(3t).$$

Etape 3 : la solution générale est

$$y(t) = y_{part}(t) + y_{hom}(t) = -\frac{3}{13} \cos(3t) - \frac{2}{13} \sin(3t) + Ce^{2t}, C \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}.$$

Etape 4 : on applique la condition initiale $y(0) = 0$ ce qui donne

$$-\frac{3}{13} + C = 0$$

d'où $C = \frac{3}{13}$ et

$$y(t) = -\frac{3}{13} \cos(3t) - \frac{2}{13} \sin(3t) + \frac{3}{13} e^{2t}, t \in \mathbb{R}.$$

c) $y'(t) - 2y(t) = t^3 - 2t^2 + t, y(0) = 0.$

L'équation est linéaire, du premier ordre. On procède par étape :

Etape 1 : solution générale de l'équation homogène On calcule en séparant les variables :

$$y_{hom} = Ce^{2t}, t \in \mathbb{R}.$$

Etape 2 : recherche de la solution particulière On cherche $y_{part}(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$. En remplaçant dans l'équation, on trouve

$$3at^2 + 2bt + c - 2at^3 - 2bt^2 - 2ct - 2d = t^3 - 2t^2 + t.$$

D'où

$$-2a = 1, \quad 3a - 2b = -2, \quad 2b - 2c = 1, \quad c - 2d = 0$$

ce qui donne $a = \frac{-1}{2}, b = \frac{1}{4}, c = \frac{-1}{4}, d = -\frac{1}{8}$ et donc

$$y_{part}(t) = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}.$$

Etape 3 : la solution générale est

$$y(t) = y_{part}(t) + y_{hom}(t) = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t - \frac{1}{8} + Ce^{2t}, C \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}.$$

Etape 4 : on applique la condition initiale $y(0) = 0$ ce qui donne

$$C = \frac{1}{8}$$

et

$$y(t) = \frac{1}{8}e^{2t} - \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}, t \in \mathbb{R}.$$

d) $y'(t) + y(t) = t^2 e^{-t}, y(-1) = 2.$

L'équation est linéaire, du premier ordre. On procède par étape :

Etape 1 : solution générale de l'équation homogène On calcule en séparant les variables :

$$y_{hom} = C e^{-t}, t \in \mathbb{R}.$$

Etape 2 : recherche de la solution particulière On cherche $y_{part}(t) = C t^3 e^{-t}$ En remplaçant dans l'équation, on trouve

$$C 3t^2 e^{-t} = t^2 e^{-t}.$$

D'où $C = \frac{1}{3}$ et donc

$$y_{part}(t) = \frac{1}{3} t^3 e^{-t}.$$

Etape 3 : la solution générale est

$$y(t) = y_{part}(t) + y_{hom}(t) = \frac{1}{3} t^3 e^{-t} + C e^{-t}, C \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}.$$

Etape 4 : on applique la condition initiale $y(-1) = 2$ ce qui donne

$$-\frac{1}{3} e + C e = 2$$

d'où

$$C = \frac{2}{e} + \frac{1}{3}$$

et

$$y(t) = \frac{1}{3} t^3 e^{-t} + \left(\frac{2}{e} + \frac{1}{3} \right) e^{-t}, t \in \mathbb{R}.$$

e) $y'(t) + \tan(t)y(t) = \cos(t), t \in]0, \frac{\pi}{2}[, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

L'équation est linéaire, du premier ordre. On procède par étape :

Etape 1 : solution générale de l'équation homogène On calcule en séparant les variables :

$$y' = -\tan(t)y \rightsquigarrow \frac{dy}{y} = -\frac{\sin(t)}{\cos(t)} dt \rightsquigarrow \ln|y| = \ln|\cos(t)| + C \rightsquigarrow y(t) = C \cos(t), C \in \mathbb{R}^*.$$

D'où

$$y_{hom} = C \cos(t), C \in \mathbb{R}, t \in]0, \frac{\pi}{2}[.$$

Etape 2 : recherche de la solution particulière

On applique la variation de la constante. On cherche $y_{part}(t) = C(t) \cos(t)$. En remplaçant dans l'équation, on trouve

$$C'(t) \cos(t) = \cos(t) \Leftrightarrow C'(t) = 1.$$

D'où $C(t) = t$ et donc

$$y_{part}(t) = t \cos(t).$$

Etape 3 : la solution générale est

$$y(t) = y_{part}(t) + y_{hom}(t) = t \cos(t) + C \cos(t), C \in \mathbb{R}, t \in]0, \frac{\pi}{2}[.$$

Etape 4 : on applique la condition initiale $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ ce qui donne

$$\frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} + C \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

d'où

$$C = \sqrt{2} - \frac{\pi}{4}$$

et

$$y(t) = t \cos(t) + \left(\sqrt{2} - \frac{\pi}{4} \right) \cos(t), t \in]0, \frac{\pi}{2}[.$$

Exercice 9. Exercices de révision - EDO linéaires d'ordre 2

Résoudre les équations différentielles avec valeurs initiales suivantes :

- a) $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = te^{-2t}, y(0) = 0, y'(0) = 1$
- b) $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = te^{-t} \sin(t), y(0) = 2, y'(0) = -1$
- c) $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = t^2 e^{-t}, y(1) = e^{-1}, y'(1) = -2e^{-1}$.

Correction.

- a) $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = te^{-2t}, y(0) = 0, y'(0) = 1$.

L'équation est linéaire, du second ordre. On procède par étape :

Etape 1 : recherche des solutions de l'équation homogène.

Le polynôme caractéristique est $\lambda^2 + 3\lambda + 2$ et son discriminant $\Delta = 1$, d'où les racines sont $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = -1$. Les solutions sont

$$h_1(t) = e^{-2t}, h_2(t) = e^{-t}$$

et

$$y_{hom}(t) = C_1 h_1(t) + C_2 h_2(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t}.$$

Etape 2 : recherche de la solution particulière.

On rappelle la démarche pour trouver la solution particulière y_{part} à l'aide de la méthode des coefficients indéterminés.

On écrit le membre de droite $q(t) = te^{-2t}$ comme

$$q(t) = e^{rt} \cos(\theta t) P(t) + e^{rt} \sin(\theta t) Q(t) \text{ avec } P, Q \text{ des polynômes.}$$

On cherche y_{part} comme

$$y_{part}(t) = t^s e^{rt} \cos(\theta t) R(t) + t^s e^{rt} \sin(\theta t) S(t)$$

où R, S sont des polynômes tels que $\deg R = \deg S = \max(\deg P, \deg Q)$ et s est tel que $t^s e^{rt} \cos(\theta t)$ n'est pas solution du problème homogène. Ici on applique cette méthode avec $r = -2, \theta = 0, P(t) = t$ et on ne s'occupe pas de Q comme $\theta = 0$. Le plus petit s tel que $t^s e^{-2t}$ ne solutionne pas l'équation homogène est $s = 1$. On cherche alors une solution particulière sous la forme

$$y_{part}(t) = te^{-2t}(at + b) = (at^2 + bt)e^{-2t}.$$

En remplaçant dans l'équation, on obtient

$$-2ate^{-2t} + (2a + b)e^{-2t} = te^{-2t}.$$

On a alors

$$-2a = 1, \quad 2a + b = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}, b = -1$$

et donc

$$y_{part}(t) = \left(-\frac{1}{2}t^2 - t \right) e^{-2t}.$$

Etape 3: la solution générale de l'équation est

$$y(t) = y_{part}(t) + y_{hom}(t) = \left(-\frac{1}{2}t^2 - t \right) e^{-2t} + C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t}.$$

Etape 4: on applique les conditions initiales. On a

$$C_1 + C_2 = 0, \quad -1 - 2C_1 - C_2 = 1 \Rightarrow C_1 = -2, \quad C_2 = 2$$

et donc la solution est

$$y(t) = \left(-\frac{1}{2}t^2 - t - 2 \right) e^{-2t} + 2e^{-t}, t \in \mathbb{R}.$$

b) $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = te^{-t} \sin(t), y(0) = 2, y'(0) = -1$

L'équation est linéaire, du second ordre. On procède par étape :

Etape 1 : recherche des solutions de l'équation homogène.

Le polynôme caractéristique est $\lambda^2 + 2\lambda + 2$ et son discriminant $\Delta = -4$, d'où les racines sont $\lambda_1 = -1 + i$ et $\lambda_2 = -1 - i$. Les solutions sont

$$h_1(t) = e^{-t} \cos(t), h_2(t) = e^{-t} \sin(t)$$

et

$$y_{hom}(t) = C_1 h_1(t) + C_2 h_2(t) = C_1 e^{-t} \cos(t) + C_2 e^{-t} \sin(t).$$

Etape 2 : recherche de la solution particulière.

On rappelle la démarche pour trouver la solution particulière y_{part} à l'aide de la méthode des coefficients indéterminés.

On écrit le membre de droite $q(t) = te^{-t} \sin(t)$ comme

$$q(t) = e^{rt} \cos(\theta t) P(t) + e^{rt} \sin(\theta t) Q(t) \text{ avec } P, Q \text{ des polynômes.}$$

On cherche y_{part} comme

$$y_{part}(t) = t^s e^{rt} \cos(\theta t) R(t) + t^s e^{rt} \sin(\theta t) S(t)$$

où R, S sont des polynômes tels que $\deg R = \deg S = \max(\deg P, \deg Q)$ et s est tel que $t^s e^{rt} \cos(\theta t)$ n'est pas solution du problème homogène. Ici on applique cette méthode avec $r = -1, \theta = 1, P(t) = 0, Q(t) = t$. Le plus petit s tel que $t^s e^{-t} \cos(t)$ ne solutionne pas l'équation homogène est $s = 1$. On cherche alors une solution particulière sous la forme

$$y_{part}(t) = te^{-t} \cos(t)(at + b) + te^{-t} \sin(t)(ct + d) = (at^2 + bt)e^{-t} \cos(t) + (ct^2 + dt)e^{-t} \sin(t).$$

En remplaçant dans l'équation, on obtient

$$(2a + 2d)e^{-t} \cos(t) + 2ce^{-t} \sin(t) + (2b + 4c)te^{-t} \cos(t) + (-4a + 2b)te^{-t} \sin(t) = te^{-t} \sin(t).$$

On a alors

$$2a + 2d = 0, \quad 2c = 0, \quad 2b + 4c = 0, \quad -4a + 2b = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{4}, b = 0, c = 0, d = \frac{1}{4}.$$

et donc

$$y_{part}(t) = -\frac{1}{4}t^2 e^{-t} \cos(t) + \frac{1}{4}te^{-t} \sin(t).$$

Etape 3: la solution générale de l'équation est

$$y(t) = y_{part}(t) + y_{hom}(t) = -\frac{1}{4}t^2 e^{-t} \cos(t) + \frac{1}{4}te^{-t} \sin(t) + C_1 e^{-t} \cos(t) + C_2 e^{-t} \sin(t).$$

Etape 4: on applique les conditions initiales. On a

$$C_1 = 2, \quad -C_1 + C_2 = -1 \Rightarrow C_1 = 2, C_2 = 1$$

et donc la solution est

$$y(t) = \left(2 - \frac{1}{4}t^2\right) e^{-t} \cos(t) + \left(1 + \frac{1}{4}t\right) e^{-t} \sin(t), t \in \mathbb{R}.$$

c) $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = t^2e^{-t}, y(1) = e^{-1}, y'(1) = -2e^{-1}.$

L'équation est linéaire, du second ordre. On procède par étape :

Etape 1 : recherche des solutions de l'équation homogène.

Le polynôme caractéristique est $\lambda^2 + 2\lambda + 1$ et son discriminant $\Delta = 0$, d'où l'unique racine est $\lambda = -1$. Les solutions sont

$$h_1(t) = e^{-t}, h_2(t) = te^{-t}$$

et

$$y_{hom}(t) = C_1h_1(t) + C_2h_2(t) = C_1e^{-t} + C_2te^{-t}.$$

Etape 2 : recherche de la solution particulière.

On rappelle la démarche pour trouver la solution particulière y_{part} à l'aide de la méthode des coefficients indéterminés.

On écrit le membre de droite $q(t) = t^2e^{-t}$ comme

$$q(t) = e^{rt} \cos(\theta t)P(t) + e^{rt} \sin(\theta t)Q(t) \text{ avec } P, Q \text{ des polynômes.}$$

On cherche y_{part} comme

$$y_{part}(t) = t^s e^{rt} \cos(\theta t)R(t) + t^s e^{rt} \sin(\theta t)S(t)$$

où R, S sont des polynômes tels que $\deg R = \deg S = \max(\deg P, \deg Q)$ et s est tel que $t^s e^{rt} \cos(\theta t)$ n'est pas solution du problème homogène. Ici on applique cette méthode avec $r = -1, \theta = 0, P(t) = t^2$. On ne prend pas en compte Q comme $\theta = 0$. Le plus petit s tel que $t^s e^{-t}$ ne solutionne pas l'équation homogène est $s = 2$. On cherche alors une solution particulière sous la forme

$$y_{part}(t) = t^2 e^{-t}(at^2 + bt + c) = (at^4 + bt^3 + ct^2)e^{-t}.$$

En remplaçant dans l'équation, on obtient

$$12at^2e^{-t} + 6bte^{-t} + 2ce^{-t} = t^2e^{-t}.$$

On a alors

$$12a = 1, \quad 6b = 0, \quad 2c = 0, \quad \Rightarrow a = \frac{1}{12}, b = 0, c = 0.$$

et donc

$$y_{part}(t) = \frac{1}{12}t^4e^{-t}.$$

Etape 3 : la solution générale de l'équation est

$$y(t) = y_{part}(t) + y_{hom}(t) = \frac{1}{12}t^4e^{-t} + C_1e^{-t} + C_2te^{-t}.$$

Etape 4 : on applique les conditions initiales. On a

$$\frac{1}{12}e^{-1} + C_1e^{-1} + C_2e^{-1} = e^{-1}, \quad -C_1e^{-1} + \frac{1}{4}e^{-1} = -2e^{-1} \Rightarrow C_1 = \frac{9}{4}, C_2 = -\frac{4}{3}.$$

et donc la solution est

$$y(t) = \frac{1}{12}(t^4 - 16t + 27)e^{-t}, t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 10. Facultatif - dynamique des populations

Dans la série 13-B, nous avons établi que pour approximer les équations différentielles

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x(t) - \beta x(t)y(t) \\ y'(t) = \delta x(t)y(t) - \gamma y(t) \end{cases}$$

qui décrivent l'évolution de la paire nombre de proie $x(t)$ -nombre de prédateur $y(t)$, on pouvait écrire le champ vectoriel

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha x - \beta xy \\ \delta xy - \gamma x \end{pmatrix}$$

puis considérer la version linéarisée des équations autour d'un point $(x(t_0), y(t_0))$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \simeq F(x(t_0), y(t_0)) + \begin{pmatrix} \alpha - \beta y(t_0) & -\beta x(t_0) \\ \delta y(t_0) & \delta x(t_0) - \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) - x(t_0) \\ y(t) - y(t_0) \end{pmatrix}$$

Géométriquement parlant, si $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ représente une courbe paramétrée, on a approximé son vecteur tangent comme

$$\dot{\gamma}(t) \simeq F(\gamma(t_0)) + \nabla F(\gamma(t_0))(\gamma(t) - \gamma(t_0))$$

où ∇F désigne la jacobienne de F . Dans le cadre de la branche de l'analyse qu'on appelle "système dynamique" on a la terminologie suivante :

- On dit que $\gamma(t_0)$ est un équilibre si $\dot{\gamma}(t_0) = (0, 0)$. Géométriquement, le point matériel sur la trajectoire de $\gamma(t)$ est à l'arrêt (sa vitesse est nulle).
- On dit que $\gamma(t_0)$ est équilibre stable si la partie réelle des valeurs propres de $\nabla F(\gamma(t_0))$ est négative ou nulle.
- On dit que $\gamma(t_0)$ est équilibre instable si une des valeurs propres de $\nabla F(\gamma(t_0))$ a une partie réelle strictement positive.

L'interpétation faite de cette terminologie est la suivante (et on donnera les raisons du pourquoi dans le prochain exercice):

- Un équilibre représente une situation dans laquelle les populations cessent de varier : le nombre d'individus de chaque espèce va rester constant.
- Un équilibre stable représente une situation dans laquelle si la population est légèrement différente dans la situation à l'équilibre, alors le nombre d'individus tend à revenir à la situation d'équilibre quand $t \rightarrow +\infty$ ou à osciller périodiquement autour de cette dernière.
- Un équilibre instable représente une situation dans laquelle si la population est légèrement différente de la situation à l'équilibre, alors le nombre d'individus ne reviendra jamais à la situation à l'équilibre quand $t \rightarrow +\infty$.

Pour chercher les équilibres, on résout

$$F(x(t_0), y(t_0)) = (0, 0).$$

En effet on aura alors $(\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0)) = F(x(t_0), y(t_0)) = (0, 0)$. Ce système (non linéaire) a deux solutions.

- Donner les points d'équilibre. On ne demande pas d'explicitier le t_0 , mais juste de donner les couples $(x(t_0), y(t_0))$ (pour trouver t_0 , il faudrait savoir résoudre le systèmes d'ODEs non linéaires). On rappelle que $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des nombres donnés, strictement positifs.
- Pour chaque point d'équilibre $\gamma(t_0)$, donner la jacobienne de ∇F en ce point.
- Pour chaque point d'équilibre $\gamma(t_0)$, donner les valeurs propres de $\nabla F(\gamma(t_0))$ et déterminer si l'équilibre est stable ou non (on s'autorise à chercher les valeurs propres dans les complexes).

Indication : pour résoudre $F(x(t_0), y(t_0)) = (0, 0)$, séparer le cas $x(t_0) = 0$ et $x(t_0) \neq 0$.

Correction.

a) On doit résoudre

$$\begin{cases} \alpha x(t_0) - \beta x(t_0)y(t_0) = 0 \\ \delta x(t_0)y(t_0) - \gamma y(t_0) = 0. \end{cases}$$

dont les solutions sont $(x(t_0), y(t_0)) = (0, 0)$ ou $(x(t_0), y(t_0)) = (\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$.

b) La jacobienne en $(0, 0)$ est

$$J_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}$$

et la jacobienne en $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$ est

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ \frac{\delta\alpha}{\beta} & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Les valeurs propres de J_1 sont $\alpha > 0$ et $-\gamma < 0$: le point d'équilibre $(0, 0)$ est instable. Ceci signifie qu'il est difficile d'atteindre la situation où les deux populations disparaissent si l'écosystème n'est pas perturbé par une action extérieure (catastrophe naturelle ou activité humaine).

Les valeurs propres de J_2 sont les nombres complexes $i\sqrt{\alpha\gamma}$, $-i\sqrt{\alpha\gamma}$ dont les parties réelles sont nulles : le point d'équilibre $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$ est stable.

Exercice 11. Exercice facultatif - dynamique des populations

Dans l'exercice précédent, nous avons déterminé que le point $(x(t_0), y(t_0)) = (\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$ est un point d'équilibre (stable). En particulier, $F(x(t_0), y(t_0)) = (0, 0)$.

En évaluant le système approché dans ce point, si la condition initiale est proche de $(x(t_0), y(t_0))$, la solution du système linéaire sera une bonne approximation des solutions exactes des équations. On va donc résoudre

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ \frac{\delta\alpha}{\beta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) - \frac{\gamma}{\delta} \\ y(t) - \frac{\alpha}{\beta} \end{pmatrix}$$

avec la condition initiale $(x(0), y(0))$.

Le système à résoudre est un système linéaire d'ODE du premier ordre. Sa résolution suit la démarche de résolution d'une seule équation, avec des éléments rappelant la résolution des ODE linéaires du second ordre. On commence par poser $u(t) = x(t) - \frac{\gamma}{\delta}$, $v(t) = y(t) - \frac{\alpha}{\beta}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ \frac{\delta\alpha}{\beta} & 0 \end{pmatrix}$.

On résout le système

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

muni des conditions initiales $u(0), v(0)$ comme

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix}.$$

L'expression e^{At} est une exponentielle de matrice, qui se calcule en diagonalisant A et en prenant l'exponentielle des valeurs propres. Dans le cas où A a des valeurs propres complexes, elle se calcule comme

$$e^{At} = e^{\mu t} P \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} P^{-1}$$

où $\mu \pm i\omega$ sont les valeurs propres de A et P est une matrice construite à partir des vecteurs propres (à coefficient complexes) associés aux valeurs propres :

- Le vecteur propre associé $\mu \pm i\omega$ s'écrit comme

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \pm i \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

- P est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix}.$$

Remarque : la formule pour e^{At} dans le cas de valeurs propres complexes est basée sur le fait que $e^{\mu \pm i\omega} = e^{\mu}(\cos(\omega) \pm i \sin(\omega))$.

- Calculer les valeurs propres de A ainsi que les vecteurs propres associés.
- Donner les solutions $u(t), v(t)$.
- En déduire les solutions $x(t), y(t)$.
- Représenter les solutions $x(t), y(t)$ pour $\alpha = 0.8, \beta = 0.4, \gamma = 0.6, \delta = 0.2$ et $x(0) = 4$ et $y(0) = 3$.

Correction.

- Les valeurs propres sont données par $\pm i\sqrt{\alpha\gamma}$ et les vecteurs propres associés sont

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\delta\alpha}{\beta} \end{pmatrix} \pm i \begin{pmatrix} -\sqrt{\alpha\gamma} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- On effectue le produit matrice vecteur

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = e^{\mu t} P \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix}$$

où on a calculé μ, ω et P à l'aide du point (1). On a

$$u(t) = u(0) \cos(\sqrt{\alpha\gamma}t) - v(0) \frac{\beta\sqrt{\alpha\gamma}}{\delta\alpha} \sin(\sqrt{\alpha\gamma}t)$$

et

$$v(t) = u(0) \frac{\delta\alpha}{\beta\sqrt{\alpha\gamma}} \sin(\sqrt{\alpha\gamma}t) + v(0) \cos(\sqrt{\alpha\gamma}t).$$

- On pose $u(t) = x(t) - \frac{\gamma}{\delta}, v(t) = y(t) - \frac{\alpha}{\beta}$ et on obtient

$$x(t) = \frac{\gamma}{\delta} + \left(x(0) - \frac{\gamma}{\delta}\right) \cos(\sqrt{\alpha\gamma}t) - \left(y(0) - \frac{\alpha}{\beta}\right) \frac{\beta\sqrt{\alpha\gamma}}{\delta\alpha} \sin(\sqrt{\alpha\gamma}t)$$

et

$$y(t) = \frac{\alpha}{\beta} + \left(x(0) - \frac{\gamma}{\delta}\right) \frac{\delta\alpha}{\beta\sqrt{\alpha\gamma}} \sin(\sqrt{\alpha\gamma}t) + \left(y(0) - \frac{\alpha}{\beta}\right) \cos(\sqrt{\alpha\gamma}t).$$

- En appliquant les données : $\alpha = 0.8, \beta = 0.4, \gamma = 0.6, \delta = 0.2$ et $x(0) = 4$ et $y(0) = 3$, on a les solutions

$$x(t) = 3 + \cos(\sqrt{0.48}t) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{0.48}t)$$

et

$$y(t) = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{0.48}t) + \cos(\sqrt{0.48}t).$$

Ci-dessous on graphe les solutions :

- En rouge, on représente l'évolution du nombre de proies. On constate que le nombre de proies oscille autour de la valeur d'équilibre $\frac{\gamma}{\delta} = 3$.
- En bleu, on représente l'évolution du nombre de prédateurs. On constate que le nombre de prédateurs oscille autour de la valeur d'équilibre $\frac{\alpha}{\beta} = 2$.
- Les pics sont décalés : il faut attendre que le nombre de proies augmentent suffisamment pour entraîner une croissance du nombre de prédateurs, ce qui crée par la suite une décroissance du nombre de proies, etc...
- Les solutions sont périodiques : sans intervention extérieure (activité humaine ou catastrophe naturelle) l'écosystème va rester dans cette configuration et les espèces ne vont pas s'éteindre.

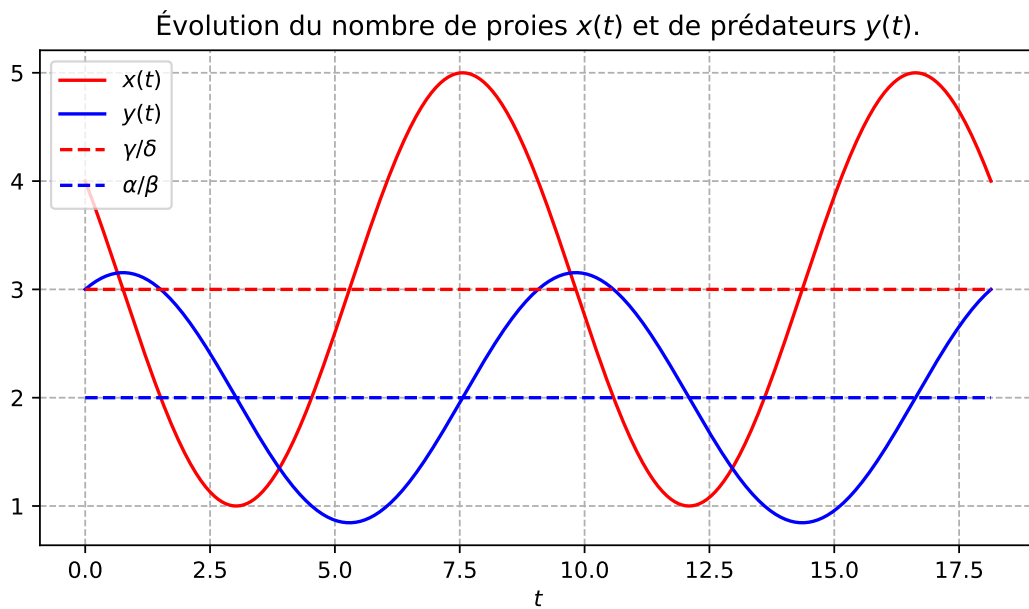


Figure 3: En rouge la solution $x(t)$ (proies) et l'équilibre $x = 3$. En bleu, la solution $y(t)$ (prédateurs) et l'équilibre $y = 2$.