Analyse Avancée II — PH

EPFL Série 14-B

Exercice 1. Wronksien

Pour chacune des paires de fonctions ci-dessous (pour lesquelles on suppose que chaque fonction est solution d'une même EDOL2 homogène), calculer le wronskien $W(t)$, puis déterminer si les fonctions proposées sont linéairement indépendantes sur l'intervalle I donné :

a) $h_1(t) = e^t, h_2(t) = te^t, I = \mathbb{R}$

b) $h_1(t) = \cos(t), h_2(t) = \sin(t), I = \mathbb{R}$

c) $h_1(t) = e^t \cos(t), h_2(t) = te^t \cos(t), I =]0, \frac{\pi}{2}[$

d) $h_1(t) = te^t, h_2(t) = 2te^t, I = \mathbb{R}$

Exercice 2. EDO linéraires d'ordre 2

Pour chacune des équations suivantes, trouver la solution à chaque problème de Cauchy suivant:

a) $y''(t) + y'(t) - 12y(t) = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 7$

b) $y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

c) $y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$

Exercice 3. Oscillateur harmonique

Pour $\omega \neq 0$, on considère les équations différentielles ordinaires suivantes :

a) $y''(t) - \omega^2 y(t) = 0.$

b) $y''(t) + \omega^2 y(t) = 0.$

Trouver la solution générale de chaque équation.

Remarque : le cas b) est l'équation d'un oscillateur harmonique, comme vue dans le cours de physique :) Dans l'exercice 2 de la série 12-B, on avait donné (sans démonstration) la solution. Ici nous montrons comment l'obtenir par le calcul.

Exercice 4. EDO linéaires d'ordre 2

Pour chacune des équations suivantes : trouver les deux solutions $h_1(t)$ et $h_2(t)$ de l'équation homogène; trouver une solution particulière puis écrire la solution générale.

a) $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = e^{3t}$

b) $y''(t) - 3y'(t) = e^{3t}$

c) $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 2t + t^2$

d) $y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = e^{-t} \cos(t)$

e) $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 8e^{-t}$

f) $y''(t) + 4y(t) = \sin(2t)$

Exercice 5. Problème de Cauchy

Trouver la solution du problème de Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = 1 + 2e^t - 4e^{-t} + 2\cos(t), \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Indication : Commencer par chercher la solution homogène y_h, puis quatres solutions particulières y_i des équations $y'' - 4y' + 3y = q_i$, pour $q_1(t) = 1$, $q_2(t) = 2e^t$, $q_3(t) = -4e^{-t}$ et $q_4(t) = 2\cos(t)$. Par linéarité, la solution générale sera $y = y_h + y_1 + y_2 + y_3 + y_4$.

Exercice 6. Facultatif - Un modèle de déformation de structure - déformation d'un pont

Figure 1: Le Pont de Dalvazza

Cet exercice présente l'application des EDOs à un problème de structure, ici la déformation d'un pont. Les données de l'exercice ont été fournies par le Professeur Numa Bertola, qui a fait ses études en Génie Civil à l'EPFL et a travaillé sur la structure de plusieurs ponts de Suisse.

Le Pont de Dalvazza (aux Grisons) a été construit en 1924, sous la direction de l'ingénieur civil Nicolas Hartmann, et est l'unique pont en béton armé construit selon le système de poutres Vierendeel en Suisse.

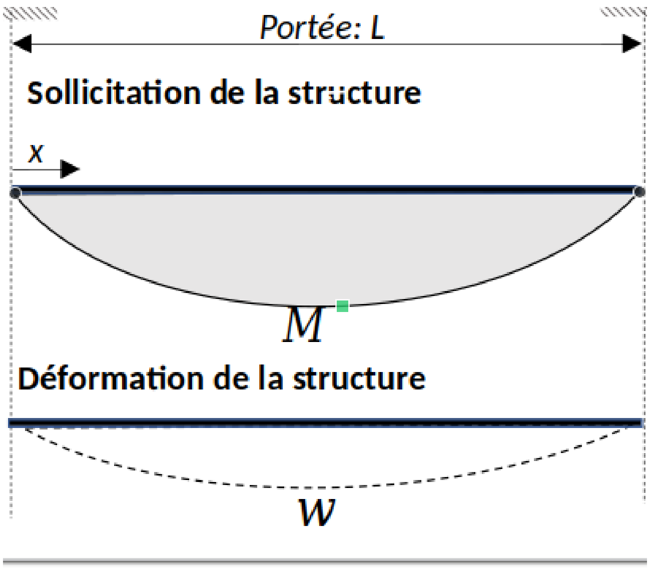

Figure 2: Représentation schématique du pont

La forme parabolique du pont contrecarre les contraintes et la déformation de la structure (qui ont un profil parabolique aussi) tout en minimisant la quantité de matériaux nécessaires (aux extrémités, les contraintes et la déformation sont moindres).

Le modèle avancé pour calculer la déformation du pont est le suivant.

On modélise le pont comme une poutre dans l'intervalle $[0, L]$, où L est la longueur du pont. La déformation $w(x)$, $x \in]0, L[$, mesurée en mètre, est sujette à l'équation

$$w''(x) = M(x)$$

où M est le moment de flexion, c'est-à-dire l'effet des charges verticales sur la structure, donné par

$$M(x) = \frac{1}{EI}(g + q)\frac{x}{2}(L - x)$$

où EI est la rigidité du pont ($[N \times m^2]$), q la charge linéaire passant sur le pont (camion, etc..) et g la charge linéaire du pont lui-même ($[N/m]$).

On impose finalement que le pont est fixe aux extrémités, c'est-à-dire $w(0) = w(L) = 0$, ce qui amène à résoudre le problème

$$\begin{cases} w''(x) = \frac{1}{EI}(g+q)\frac{x}{2}(L-x), \quad x \in]0, L[, \\ \\ w(0) = w(L) = 0. \end{cases}$$

Ce problème n'est pas un problème dit de Cauchy ou à valeurs initiales. Plutôt que d'imposer w et w' en un point, on va imposer w en deux points, pour déterminer les constantes d'intégration. On appelle cela un problème aux conditions aux limites, et $w(0) = w(L) = 0$ les conditions aux limites ou les conditions de bords. Vous apprendrez à résoudre plus généralement dans la suite de vos études ce genre de problème. En résolvant cette équation, on peut trouver $w(x)$ et en particulier la déformation maximum qui aura lieu au centre du pont, et par conséquent établir la structure de poutres nécessaire pour compenser cette dernière.

En procédant par intégration directe, chercher la solution générale de l'équation, puis appliquer les conditions aux bords pour déterminer l'unique solution de ce modèle.

Exercice 7. Facultatif - Chute libre amortie - un exemple d'équation différentielle non linéaire

Considérons un objet ponctuel de masse m que l'on lâche depuis une altitude $y = y_0$, et qui tombe vers le sol. L'axe y est orienté du ciel vers le sol. L'objet est soumis à deux forces, son poids mg et une force de freinage quadratique dûe aux frottements de l'air $-kv^2(t)$, proportionnelle au carré de la vitesse $v(t) = y'(t)$ de l'objet. Le coefficient k modélise l'intensité de la force de frottement fluide. La seconde loi de Newton fournit l'équation différentielle ordinaire suivante, à laquelle nous ajoutons les conditions initiales (objet lâché à une altitude $y = y_0$ sans vitesse initiale au temps $t = 0$):

$$\begin{cases} my''(t) = -k(y'(t))^2 + mg, \\ y(0) = y_0, \\ y'(0) = v(0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

a) Réécire cette équation du second ordre en une équation du premier ordre en introduisant la fonction $v(t) = y'(t)$.

b) Résoudre la nouvelle équation pour obtenir $v(t)$. Indication : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} = \operatorname{argth}(u)$.

c) Intégrer la vitesse pour obtenir la position $y(t)$, en prenant en compte la condition initiale.

d) Quel est le comportement de la vitesse quand $t \to \infty$? Quelle différence avec la chute libre non-amortie?

Exercice 8. Exercices de révision - EDO à variables séparables et linéaires d'ordre 1

Résoudre les équations différentielles avec valeurs initiales suivantes :

a) $y'(t) = \frac{t}{y^2(t)}, y(1) = 1.$

b) $y'(t) - 2y(t) = \sin(3t), y(0) = 0.$

c) $y'(t) - 2y(t) = t^3 - 2t^2 + t, y(0) = 0.$

d) $y'(t) + y(t) = t^2 e^{-t}, y(-1) = 2.$

e) $y'(t) + \tan(t)y(t) = \cos(t), t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

Exercice 9. Exercices de révision - EDO linéaires d'ordre 2

Résoudre les équations différentielles avec valeurs initiales suivantes :

a) $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = te^{-2t}, y(0) = 0, y'(0) = 1$

b) $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = te^{-t}\sin(t), y(0) = 2, y'(0) = -1$

c) $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = t^2e^{-t}, y(1) = e^{-1}, y'(1) = -2e^{-1}$.

Exercice 10. Facultatif - dynamique des populations

Dans la série 13-B, nous avions établi que pour approximer les équations différentielles

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x(t) - \beta x(t)y(t) \\ y'(t) = \delta x(t)y(t) - \gamma y(t) \end{cases}$$

qui décrivent l'évolution de la paire nombre de proie $x(t)$-nombre de prédateur $y(t)$, on pouvait écrire le champ vectoriel

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha x - \beta xy \\ \delta xy - \gamma x \end{pmatrix}$$

puis considérer la version linéarisée des équations autour d'un point $(x(t_0), y(t_0))$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \simeq F(x(t_0), y(t_0)) + \begin{pmatrix} \alpha - \beta y(t_0) & -\beta x(t_0) \\ \delta y(t_0) & \delta x(t_0) - \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) - x(t_0) \\ y(t) - y(t_0) \end{pmatrix}$$

Géométriquement parlant, si $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ représente une courbe paramétrée, on a approximé son vecteur tangent comme

$$\dot{\gamma}(t) \simeq F(\gamma(t_0)) + \nabla F(\gamma(t_0))(\gamma(t) - \gamma(t_0))$$

où ∇F désigne la jacobienne de F. Dans le cadre de la branche de l'analyse qu'on appelle "système dynamique" on a la terminologie suivante :

a) On dit que $\gamma(t_0)$ est un équilibre si $\dot{\gamma}(t_0) = (0, 0)$. Géométriquement, le point matériel sur la trajectoire de $\gamma(t)$ est à l'arrêt (sa vitesse est nulle).

b) On dit que $\gamma(t_0)$ est équilibre stable si la partie réelle des valeurs propres de $\nabla F(\gamma(t_0))$ est négative ou nulle.

c) On dit que $\gamma(t_0)$ est équilibre instable si une des valeurs propres de $\nabla F(\gamma(t_0))$ a une partie réelle strictement positive.

L'interpération faite de cette terminologie est la suivante (et on donnera les raisons du pourquoi dans le prochain exercice):

a) Un équilibre représente une situation dans laquelle les populations cessent de varier : le nombre d'individus de chaque espèce va rester constant.

b) Un équilibre stable représente une situation dans laquelle si la population est légèrement différente dans la situation à l'équilibre, alors le nombre d'individus tend à revenir à la situation d'équilibre quand $t \to +\infty$ ou à osciller périodiquement autour de cette dernière.

c) Un équilibre instable représente une situation dans laquelle si la population est légèrement différente de la situation à l'équilibre, alors le nombre d'individus ne reviendra jamais à la situation à l'équilibre quand $t \to +\infty$.

Pour chercher les équilibres, on résout

$$F(x(t_0), y(t_0)) = (0, 0).$$

En effet on aura alors $(\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0)) = F(x(t_0), y(t_0)) = (0, 0)$. Ce système (non linéaire) a deux solutions.

(a) Donner les points d'équilibre. On ne demande pas d'expliciter le t_0, mais juste de donner les couples $(x(t_0), y(t_0))$ (pour trouver t_0, il faudrait savoir résoudre le systèmes d'ODEs non linéaires). On rappelle que $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des nombres donnés, strictement positifs.

(b) Pour chaque point d'équilibre $\gamma(t_0)$, donner la jacobienne de ∇F en ce point.

(c) Pour chaque point d'équilibre $\gamma(t_0)$, donner les valeurs propres de $\nabla F(\gamma(t_0))$ et déterminer si l'équilibre est stable ou non (on s'autorise à chercher les valeurs propres dans les complexes).

Indication : pour résoudre $F(x(t_0), y(t_0)) = (0,0)$, séparer le cas $x(t_0) = 0$ et $x(t_0) \neq 0$.

Exercice 11. Exercice facultatif - dynamique des populations

Dans l'exercice précédent, nous avons déterminé que le point $(x(t_0), y(t_0)) = (\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$ est un point d'équilibre (stable). En particulier, $F(x(t_0), y(t_0)) = (0,0)$.

En évaluant le système approché dans ce point, si la condition initiale est proche de $(x(t_0), y(t_0))$, la solution du système linéaire sera une bonne approximation des solutions exactes des équations. On va donc résoudre

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ \frac{\delta\alpha}{\beta} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) - \frac{\gamma}{\delta} \\ y(t) - \frac{\alpha}{\beta} \end{pmatrix}$$

avec la condition initiale $(x(0), y(0))$.

Le système à résoudre un système linéaire d'ODE du premier ordre. Sa résolution suit la démarche de résolution d'une seule équation, avec des éléments rappelant la résolution des ODE linéaires du second ordre. On commence par poser $u(t) = x(t) - \frac{\gamma}{\delta}, v(t) = y(t) - \frac{\alpha}{\beta}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ \frac{\delta\alpha}{\beta} & 0 \end{pmatrix}$.

On résout le système

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

muni des conditions initales $u(0), v(0)$ comme

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = e^{At}\begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix}.$$

L'expression e^{At} est une exponentielle de matrice, qui sa calcule en diagonalisant A et en prenant l'exponentielle des valeurs propres. Dans le cas où A a des valeurs propres complexes, elle se calcule comme

$$e^{At} = e^{\mu t} P \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} P^{-1}$$

où $\mu \pm i\omega$ sont les valeurs propres de A et P est une matrice construite à partir des vecteurs propres (à coefficient complexes) associés aux valeurs propres :

- Le vecteur propre associé $\mu \pm i\omega$ s'écrit comme

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \pm i \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

- P est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix}.$$

Remarque : la formule pour e^{At} dans le cas de valeurs propres complexes est basée sur le fait que $e^{\mu \pm i\omega} = e^{\mu}(\cos(\omega) \pm i \sin(\omega))$.

a) Calculer les valeurs propres de A ainsi que les vecteurs propres associés.

b) Donner les solutions $u(t), v(t)$.

c) En déduire les solutions $x(t), y(t)$.

d) Représenter les solutions $x(t), y(t)$ pour $\alpha = 0.8, \beta = 0.4, \gamma = 0.6, \delta = 0.2$ et $x(0) = 4$ et $y(0) = 3$.

Réponses

Exercice 1.

a) $W(t) = e^{2t}$. h_1, h_2 sont linéairement indépendantes.

b) $W(t) = 1$. h_1, h_2 sont linéairement indépendantes.

c) $W(t) = e^{2t}\cos^2(t)$. h_1, h_2 sont linéairement indépendantes.

d) $W(t) = 0$. h_1, h_2 ne sont pas linéairement indépendantes.

Exercice 2.

a) $y(t) = -e^{-4t} + e^{3t}, t \in \mathbb{R}$

b) $y(t) = e^{-2t}\sin(t), t \in \mathbb{R}$

c) $y(t) = (1+t)e^{3t}, t \in \mathbb{R}$

Exercice 3.

a) $y(t) = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}, t \in \mathbb{R}$

b) $y(t) = c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t), t \in \mathbb{R}$

Exercice 4. Les solutions générales sont (par exemple) :

a) $y(t) = \frac{e^{3t}}{10} + c_1 e^t + c_2 e^{-2t}, t \in \mathbb{R}$

b) $y(t) = \frac{1}{3}te^{3t} + c_1 + c_2 e^{3t}, t \in \mathbb{R}$

c) $y(t) = \frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{9}t + \frac{2}{27} + c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-t}, t \in \mathbb{R}$

d) $y(t) = \frac{1}{8}e^{-t}\cos(t) - \frac{1}{8}e^{-t}\sin(t) + c_1 e^t\cos(t) + c_2 e^t\sin(t), t \in \mathbb{R}$

e) $y(t) = 4t^2e^{-t} + c_1 e^{-t} + c_2 te^{-t}, t \in \mathbb{R}$.

f) $y(t) = -\frac{1}{4}t\cos(2t) + c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t), t \in \mathbb{R}$.

Les solutions du problème homogène sont données dans chaque cas par les fonctions multipliées par c_1,c_2.

Exercice 5.

$$y(t) = \frac{1}{3} - te^t - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{5}\cos(t) - \frac{2}{5}\sin(t) - e^t + \frac{29}{30}e^{3t}, t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 8.

a) $y(t) = \sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}}, t \in]\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty[$

b) $y(t) = -\frac{3}{13}\cos(3t) - \frac{2}{13}\sin(3t) + \frac{3}{13}e^{2t}, t \in \mathbb{R}$

c) $y(t) = \frac{1}{8}e^{2t} - \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}, t \in \mathbb{R}$

d) $y(t) = \frac{1}{3}t^3e^{-t} + \left(\frac{2}{e} + \frac{1}{3}\right)e^{-t}, t \in \mathbb{R}$

e) $y(t) = t\cos(t) + \left(\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos(t), t \in]0, \frac{\pi}{2}[$

Exercice 9.

a) $y(t) = \left(-\frac{1}{2}t^2 - t - 2\right)e^{-2t} + 2e^{-t}, t \in \mathbb{R}$

b) $y(t) = \left(2 - \frac{1}{4}t^2\right)e^{-t}\cos(t) + \left(1 + \frac{1}{4}t\right)e^{-t}\sin(t), t \in \mathbb{R}$

c) $y(t) = \frac{1}{12}(t^4 - 16t + 27)e^{-t}, t \in \mathbb{R}$