Exercice 1. Classifiation des EDO

Parmi les équations différentielles ci-dessous, déterminer lesquelles peuvent se récrire comme des équations à variables séparées et lesquelles sont linéaires.

a) $y'(t) - 3y(t) = 0$

b) $y'(t) - 3y(t) = 1$

c) $y'(t) - 3y(t) = t$

d) $y'(t) + t^2y^2(t) = 0$

e) $y'(t) + t^2y^2(t) = t^2$

f) $y'(t) + t^2y^2(t) = t^3$

Correction.

a) L'équation peut être mise sous la forme $y' + py = q$ avec $p = -3$ et $q = 0$. Elle est donc linéaire. Elle est aussi à varibales séparées comme on peut l'écrire comme $\frac{y'}{3y} = 1$.

b) L'équation peut être mise sous la forme $y' + py = q$ avec $p = -3$ et $q = 1$. Elle est donc linéaire. On peut toujours séparer les variables en écrivant par exemple $\frac{y'}{1+3y} = 1$

c) L'équation peut être mise sous la forme $y' + py = q$ avec $p = -3$ et $q = t$. Elle est donc linéaire. Cependant, on ne peut pas séparer les variables.

d) L'équation est non linéaire en raison du y^2. Elle est à variables séparées car on peut l'écrire comme $\frac{y'}{y^2} = -t^2$.

e) L'équation est non linéaire en raison du y^2. On peut séparer les variables comme on peut l'écrire comme $\frac{y'}{1-y^2} = t^2$.

f) L'équation est non linéaire en raison du y^2. On ne peut pas séparer les variables.

Exercice 2. EDO linéaire à coefficients constants

Résoudre le problème de Cauchy suivant:

$$\begin{cases} y'(t) = 3y(t) + 1 + t, \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Indication: On peut procéder avec la formule du cours ou alors on peut trouver une solution particulière de la forme $y(t) = at + b$.

Correction.

On observe d'abord que l'EDO est linéaire car on peut l'écrire comme $y'(t) + p(t)y(t) = q(t)$ avec $p(t) = -3$ et $q(t) = 1 + t$.

On résout d'abord le problème sans valeur initale.

Etape 1 : on cherche la solution générale du problème homoègène $y' - 3y = 0$. La solution générale est $y_{hom}(t) = Ce^{3t}, C \in \mathbb{R}$. On peut l'obtenir par séparation des variables. On sépare le cas $y = 0$ (qui est solution) du cas $y \neq 0$. On calcule ensuite pour $y \neq 0$

$$y' - 3y = 0 \rightsquigarrow y' = 3y \rightsquigarrow \frac{y'}{y} = 3 \rightsquigarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} = 3\mathrm{d}t \rightsquigarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = 3\int \mathrm{d}t \rightsquigarrow \ln|y| = 3t + C, C \in \mathbb{R}$$
$$\rightsquigarrow |y| = Ce^{3t}, C \in \mathbb{R}_+^* \rightsquigarrow y = \pm Ce^{3t}, C \in \mathbb{R}_+^* \rightsquigarrow y = Ce^{3t}, C \in \mathbb{R}^*$$

En incluant la solution $y = 0$, on trouve finalement $y_{hom}(t) = Ce^{3t}, C \in \mathbb{R}$.

Etape 2 : on cherche une solution particulière de l'équation $y' - 3y = 1 + t$ sous la forme $y_{part}(t) = at + b$.

On a

$$(at + b)' - 3(at + b) = -3at + a - 3b = t + 1.$$

On doit donc satisfaire

$$-3a = 1 \text{ et } a - 3b = 1$$

d'où $a = -\frac{1}{3}$ et $b = -\frac{4}{9}$. Donc $y_{part}(t) = -\frac{1}{3}t - \frac{4}{9}$.

Etape 3 : la solution générale de $y' - 3y = 1 + t$ est alors donnée par

$$y(t) = y_{part}(t) + y_{hom}(t) = -\frac{1}{3}t - \frac{4}{9} + Ce^{3t}, C \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}.$$

Etape 4 : En imposant la condition $y(0) = -1$ on trouve $C = -\frac{5}{9}$, d'où la solution du problème à valeur initiale est

$$y(t) = -\frac{1}{9}(5e^{3t} + 3t + 4), t \in \mathbb{R}.$$

Remarque : on peut aussi rechercher la solution particulière à l'aide de la méthode de la variation de la constante. On pose $y_{part}(t) = C(t)e^{3t}$ et on l'injecte dans l'équation, ce qui donne

$$C'(t)e^{3t} + C(t)3e^{3t} - C(t)3e^{3t} = 1 + t$$

d'où

$$C'(t) = (1 + t)e^{-3t}$$

et donc $C(t) = \int (1 + t)e^{-3t}\mathrm{d}t$ que l'on doit intégrer par partie :

$$C(t) = (1 + t)\frac{e^{-3t}}{-3} - \int \frac{e^{-3t}}{-3}\mathrm{d}t = (1 + t)\frac{e^{-3t}}{-3} - \frac{1}{9}e^{-3t} + C.$$

Et donc on peut choisir en posant $C = 0$

$$y_{part} = C(t)e^{3t} = \left((1 + t)\frac{e^{-3t}}{-3} - \frac{1}{9}e^{-3t}\right)e^{3t} = -\frac{1}{3}t - \frac{4}{9}$$

qui est la même solution que nous avions trouvée précédemment. Cependant, le calcul peut être plus compliqué, il est donc recommandé, dès qu'on le peut, de rechercher la solution particulière par "tatonnement" avant d'utiliser la grande machinerie :)

Exercice 3. EDO linéaire à coefficients constants

Résoudre le problème de Cauchy suivant:

$$\begin{cases} y'(t) = 3y(t) + 2\cos(t), & t \in \mathbb{R} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Indication: On peut procéder avec la formule du cours ou alors on peut trouver une solution particulière de la forme $y(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$.

Correction.

L'EDO est linéaire car elle peut s'écrire comme $y'(t) + p(t)y(t) = q(t)$ avec $p(t) = -3$ et $q(t) = 2\cos(t)$. On résout d'abord sans la condition initiale en recherchant la solution générale.

Etape 1 : On cherche la solution générale du problème homogène $y' - 3y = 0$. La solution générale est $y_{hom}(t) = Ce^{3t}, C \in \mathbb{R}$.

Etape 2 : On cherche une solution particulière de $y' - 3y = 2\cos(t)$ de la forme $y_{part}(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$:

$$y'_{part}(t) - 3y_{part}(t) = -a\sin(t) + b\cos(t) - 3(a\cos(t) + b\sin(t)) = 2\cos(t).$$

On doit donc avoir l'égalité

$$(b-3a)\cos(t)+(-3b-a)\sin(t)=2\cos(t)$$

d'où

$$b-3a=2 \text{ et } -3b-a=0.$$

De là on déduit les valeurs $a=-\frac{3}{5}$ et $b=\frac{1}{5}$. D'où la solution particulière est

$$y_{part}(t)=\frac{1}{5}(\sin(t)-3\cos(t))$$

Etape 3 : la solution générale de $y'-3y=1+t$ est alors donnée par

$$y(t)=y_{part}(t)+y_{hom}(t)=\frac{1}{5}(\sin(t)-3\cos(t))+Ce^{3t}, C\in\mathbb{R}.$$

Etape 4 : en tenant compte de la condition initiale $y(0)=1$, on doit résoudre

$$-\frac{3}{5}+C=1$$

on trouve $C=\frac{8}{5}$ et on a la solution du problème à valeur initiale

$$y(t)=\frac{1}{5}(\sin t-3\cos t)+\frac{8}{5}e^{3t}, t\in\mathbb{R}.$$

Remarque : on peut rechercher la solution particulière à l'aide de la méthode de la variation de la constante. Ce n'est pas conseillé car cela amène à rechercher la primitive de $2\cos(t)e^{-3t}$ qui doit se faire au prix de quelques intégration par partie :(

Exercice 4. EDO linéaire à coefficients non-constants

a) Trouver la solution générale de l'équation

$$y'(t)+\frac{\cos(t)}{\sin(t)}y(t)=t$$

sur l'intervalle $I=\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

b) Donner la solution particulière de l'équation telle que $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

Correction.

a) *Etape 1.* On recherche d'abord la solution du problème homogène $y'+\frac{\cos(t)}{\sin(t)}y=0$ par la méthode de séparation des variables. On a la solution $y(t)=0$ pour tout t, sinon on peut séparer les variables et résoudre

$$y'=-\frac{\cos(t)}{\sin(t)}y \rightsquigarrow \frac{y'}{y}=-\frac{\cos(t)}{\sin(t)} \rightsquigarrow \frac{\mathrm{d}y}{y}=-\frac{\cos(t)}{\sin(t)}\mathrm{d}t$$
$$\rightsquigarrow \ln|y|=-\ln(\sin(t))+C, C\in\mathbb{R}. \rightsquigarrow y=\pm\frac{C}{\sin(t)}, C\in\mathbb{R}_+^*.$$

Et finalement, en incluant la solution $y=0$, la solution générale de l'équation homogène est

$$y_{hom}(t)=\frac{C}{\sin(t)}, C\in\mathbb{R}$$

et on restreint t à l'intervalle demandé, à savoir $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

Etape 2. On recherche une solution particulière y_{part} avec la méthode de la variation de la constante. On pose $y_{part}(t) = \frac{C(t)}{\sin(t)}$ et on l'injecte dans l'équation :

$$C'(t)\frac{1}{\sin(t)} + \underbrace{C(t)\left(\frac{1}{\sin(t)}\right)' + \frac{\cos(t)}{\sin(t)}\frac{C(t)}{\sin(t)}}_{=0} = t.$$

On ne prend pas la peine de calculer le deuxième terme car on sait que $\frac{1}{\sin(t)}$ solutionne le problème homogène. Il reste donc

$$C'(t) = t\sin(t).$$

On intègre partie et on trouve

$$C(t) = \int t\sin(t)\mathrm{d}t = -t\cos(t) + \int \cos(t)\mathrm{d}t = -t\cos(t) + \sin(t) + C, C \in \mathbb{R}.$$

En choisissant $C(t)$ avec $C = 0$, on a la solution particulière

$$y_{part}(t) = \frac{C(t)}{\sin(t)} = \frac{-t\cos(t) + \sin(t)}{\sin(t)} = -t\frac{\cos(t)}{\sin(t)} + 1.$$

Etape 3. La solution générale de l'EDO est

$$y(t) = y_{part}(t) + y_{hom}(t) = -t\frac{\cos(t)}{\sin(t)} + 1 + \frac{C}{\sin(t)}, C \in \mathbb{R}, t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

b) En posant $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, on doit résoudre

$$0 = -\frac{\pi}{4} + 1 + \frac{2C}{\sqrt{2}}$$

ce qui donne $C = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 1\right)$ d'où la solution

$$y(t) = -t\frac{\cos(t)}{\sin(t)} + 1 + \frac{\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{4} - 1\right)}{2\sin(t)} t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Exercice 5. EDO linéaire à coefficients non-constants

Trouver la solution générale de l'équation différentielle suivante, puis déterminer les solutions y_1 et y_2 définies par les conditions initiales données :

$$y'(t) - \frac{2}{t^2 - 1}\, y(t) = 1\,, \qquad y_1(0) = 1\,, \qquad y_2(2) = -6$$

Correction.

On résout d'abord l'équation sans valeur initiale. On observe que la fonction $\frac{2}{t^2-1}$ est continue sur $]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$. On aura donc 3 familles de solutions générales, chacune définie sur un intervalle maximal différent.

Etape 1. On résout le problème homogène $y' - \frac{2}{t^2-1}y = 0$.

- $y(t) = 0$ est solution.
- si $y \neq 0$, on peut séparer les variables.

$$y' = \frac{2}{t^2-1}y \rightsquigarrow \frac{y'}{y} = \frac{2}{t^2-1} \rightsquigarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{2\mathrm{d}t}{t^2-1} \rightsquigarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\mathrm{d}t$$

$$\rightsquigarrow \ln|y| = \ln|t-1| - \ln|t+1| + C, C \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \ln|y| = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C, C \in \mathbb{R}$$

$$\rightsquigarrow |y| = C\left|\frac{t-1}{t+1}\right|, C \in \mathbb{R}_+^* \rightsquigarrow y = C\frac{t-1}{t+1}, C \in \mathbb{R}^*$$

En incluant la solution $y = 0$, on arrive à la solution générale

$$y_{hom}(t) = C\frac{t-1}{t+1}, C \in \mathbb{R}.$$

Etape 2. On cherche une solution particulière de $y' - \frac{2}{t^2-1}y = 1$ à l'aide de la méthode de la séparation des variables. On pose $y_{part}(t) = C(t)\frac{t-1}{t+1}$ et on l'injecte dans l'équation

$$C'(t)\frac{t-1}{t+1} + C(t)\left(\frac{t-1}{t+1}\right)' - \frac{2C(t)}{t^2-1}\frac{t-1}{t+1} = 1.$$

$\dfrac{t-1}{t+1}$ étant solution de l'équation homogène, il reste

$$C'(t)\frac{t-1}{t+1} = 1$$

d'où

$$C(t) = \int \frac{t+1}{t-1}\mathrm{d}t = \int \frac{t}{t-1} + \frac{1}{t-1}\mathrm{d}t = \int \frac{t-1}{t-1} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t-1}\mathrm{d}t =$$
$$\int 1 + \frac{2}{t-1}\mathrm{d}t = t + \ln(t-1)^2 + C, C \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, on peut choisir $C(t)$ avec $C = 0$ et on a

$$y_{part}(t) = C(t)\frac{t-1}{t+1} = \left(t + \ln(t-1)^2\right)\frac{t-1}{t+1}.$$

Etape 3. La solution générale est donnée

$$y(t) = y_{part}(t) + y_{hom}(t) = \left(t + \ln(t-1)^2\right)\frac{t-1}{t+1} + C\frac{t-1}{t+1}, C \in \mathbb{R}.$$

La solution n'étant pas définie pour $t = \pm 1$ l'intervalle maximale est donc

$$I =]-\infty, -1[\text{ ou } I =]-1, 1[\text{ ou } I =]1, +\infty[.$$

Finalement, on impose les valeurs initiales.
L'unique solution vérifiant $y_1(0) = 1$ est définie sur l'intervalle $]-1\,,\,1[$ par

$$y_1(t) = \left[\,t - 1 + \ln(t-1)^2\,\right] \cdot \frac{t-1}{t+1}.$$

L'unique solution vérifiant $y_2(2) = -6$ est définie sur l'intervalle $]\,1\,,\,+\infty\,[$ par

$$y_2(t) = \left[\,t - 20 + \ln(t-1)^2\,\right] \cdot \frac{t-1}{t+1}.$$

Exercice 6. Vous reprendrez bien quelques EDO?
Résoudre les trois problèmes de Cauchy suivants

a) $y'(t) - \dfrac{3}{t}y(t) = t\,, \quad y(-2) = 4\,,$

b) $t\,y'(t) - 3y(t) = t^2\,, \quad y(0) = 0\,.$

c) $t\,y'(t) - 3y(t) = t^2\,, \quad y(0) = 1\,.$

Correction.

a) On résout d'abord le problème sans valeur initiale. On reconnait que l'EDO est linéaire.

Etape 1 La solution génrale du problème homogène $y' - \frac{3}{t}y = 0$ est obtenue par séparation des variables. Soit $y = 0$, soit on calcule

$$y' = \frac{3}{t}y \rightsquigarrow \frac{y'}{y} = \frac{3}{t} \rightsquigarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = 3\int \frac{1}{t}\mathrm{d}t \rightsquigarrow \ln|y| = 3\ln|t| + C \rightsquigarrow y = Ct^3, C \in \mathbb{R}^*.$$

En incluant la solution constante nulle, on trouve

$$y_{hom}(t) = Ct^3, C \in \mathbb{R}.$$

Etape 2. Une solution particulière de $y' - \frac{3}{t}y = t$ peut se trouver sous la forme at^2 avec $a \in \mathbb{R}$. En injectant dans l'équation on obtient

$$2at - 3at = t$$

d'où $a = -1$ et $y_{part}(t) = -t^2$. Si on ne voit pas la forme de la solution particulière, on peut aussi procéder par la variation de la constante.

Etape 3. La solution générale de $y' - \frac{3}{t}y = t$ est donc donnée par

$$y(t) = y_{part}(t) + y_{hom}(t) = -t^2 + Ct^3, C \in \mathbb{R}.$$

$y(t)$ est définie sur tout $\mathbb{R}$ mais ne vérifie l'équation que sur $\mathbb{R}^*$ (l'équation n'as pas de sens en $t = 0$. L'intervalle maximale pour lequel $y(t)$ est solution est donc $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$.

Etape 4. En prenant en compte la condition initiale $y(-2) = 4$, on trouve $C = -1$ et la solution du problème avec condition initiale est

$$y(t) = -t^2 - t^3$$

définie sur $]-\infty, 0[$.

b) Pour résoudre $ty' - 3y = t^2 \quad (2)$, on divise par t pour se ramener à l'équation $y' - \frac{3}{t}y = t \quad (1)$ dont la solution générale est $y(t) = -t^2 + Ct^3$. On a donc que tout solution de (2) est solution de (1) et on peut vérifier que toute solution de (1) est solution de (2). La solution générale de (2) est donc $y(t) = -t^2 + Ct^3$ et l'intervalle maximale est $\mathbb{R}$. Si on prend en compte la condition initiale $y(0) = 0$, on se rend compte que toute solution particulière parmi $-t^2 + Ct^3$ satisfait cette condition. Le problème n'a donc pas de solution unique.

c) La solution générale de (3) sont les mêmes que pour (2), à savoir $y(t) = -t^2+Ct^3$. Si on prend en compte la condition $y(0) = 1$, on se rend compte qu'aucune solution particulière ne satisfait cette contrainte. Il n'y a donc aucune solution au problème à valeur initiale $ty' - 3y = t^2, y(0) = 1$.

Remarque : Les points (2) et (3) de cet exercice ne contredisent pas le théorème d'unicité et d'existence vue en cours pour les équations linéaires, car l'équation $ty'(t) - 3y(t) = t^2$ ne peut pas s'écrire de la forme $y' + py = q$ pour tout t en raison du terme $ty'(t)$ (il y a un problème en $t = 0$).

Exercice 7. Facultatif - dynamique des populations

Dans la série 12-B, nous avions vu un modèle pour décrire la croissance d'une population dans un écosystème aux ressources limitées et sujette à la chasse de prédateurs. Sous certaines hypothèses (en particulier des échelles de temps "courtes" et un nombre de prédateurs supposés constant) ce modèle permettait de prédire l'évolution de la population.

En général, ce modèle n'est pas acceptable, car les diverses populations vont s'influencer. Un autre modèle, qui prend en compte l'évolution du nombre de prédateurs, en fonction du nombres proies, est le modèle suivant, appelé équations de Lokta-Volterra :

On note $x(t)$ la taille de la population des proies au temps t et $y(t)$ la taille de la population de prédateurs au temps t. Les relations qui lient $x(t)$ et $y(t)$ s'écrivent comme une paire d'équations différentielles ordinaires :

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x(t) - \beta x(t)y(t) \\ y'(t) = \delta x(t)y(t) - \gamma y(t) \end{cases}$$

avec $t \in [0, T]$ et $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ des coefficients qui décrivent comment évoluent $x(t)$ et $y(t)$ (autrement dit donne $x'(t)$ et $y'(t)$):

- α : le taux de reproduction des proies. Le terme $\alpha x(t)$ décrit une croissance exponentielle des proies : en l'absence de prédateurs, les proies vont se reproduire sans limite.
- β : le terme $-\beta x(t)y(t)$ décrit le nombre de rencontre possible entre les proies et les prédateurs (produit proies-prédateurs) et $-\beta$ représente le taux de proies mangées lors de ces rencontres.
- γ : le taux de décroissance des prédateurs, en l'absence de proies $-\gamma y(t)$ décrit une décroissance du nombre de prédateurs : sans proies à manger, les prédateurs vont disparaitre.
- δ : du point de vue des prédateurs, les rencontres prédateurs-proies permettent aux prédateurs de se nourrir et donc de pouvoir survivre et continue à se reproduire (d'où un terme du type $x(t)y(t)$ contrairement au terme $-x(t)y(t)$ dans l'équation pour l'évolution du nombre de proies).

Remarque : on pourrait encore complexifier les équations en prenant en compte par exemple

- un limitation des ressources (c'est-à-dire la nourriture des proies) : même en l'absence des prédateurs, le nombre de proies ne peut pas exploser, car l'écosystème ne peut pas en accueillir plus que tant,
- une troisième équation qui décrit l'évolution de ces ressources (par exemple pour une forêt, des chenilles et des oiseaux, on pourrait décrire l'évolution du nombre d'arbres qui sont vus comme des proies des chenilles qui sont alors des prédateurs).
- des contraintes extérieurs : les activités humaines comme la chasse, la pêche, l'exploitation du milieu (bucheronnage etc...).

Le problème mathématique qui en découle est un **système d'EDOs** pour lequel ce que nous avons appris dans le chapitre 1 est généralisable. Le seul obstacle ici est que les équations sont non linéaires en raison des termes $x(t)y(t)$.

Dans plusieurs exercices consécutifs, nous allons essayer malgré tout de travailler ce système et d'en conclure quelque chose sur l'évolution des populations.

La première étape consiste à "linéariser le système" : on cherche un système linéaire qui approxime bien nos équations. On écrit le système comme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = F(x(t), y(t)) \quad (1)$$

où $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

a) Donner la fonction $F(x, y)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

b) Calculer la jacobienne de F.

c) Ecrire le système "approché"

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = F(x(t_0), y(t_0)) + \nabla F((x(t_0), y(t_0)) \begin{pmatrix} x(t) - x(t_0) \\ y(t) - y(t_0) \end{pmatrix} \qquad (2)$$

où t_0 est un temps quelconque, fixé. En fait, on a calculé le développement limité de F à l'ordre 1, et on a remplacé $F(x(t), y(t))$ dans les équations par le développement limité de F au voisinage de $(x(t_0), y(t_0))$ évalué en $(x(t), y(t))$.

Les solutions de (2) ne sont pas exactement les solutions de (1) mais en sont une "bonne" approximation.

Correction.

a) $F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)) = (\alpha x - \beta xy, \delta xy - \gamma y)$.

b) $\nabla F(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha - \beta y & -\beta x \\ \delta y & \delta x - \gamma \end{pmatrix}$.

c) Le système approché est

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = F(x(t_0), y(t_0)) + \begin{pmatrix} \alpha - \beta y(t_0) & -\beta x(t_0) \\ \delta y(t_0) & \delta x(t_0) - \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) - x(t_0) \\ y(t) - y(t_0) \end{pmatrix}$$