**Analyse Avancée II** — PH

EPFL Série 13-B

**Exercice 1. Classifiation des EDO**

Parmi les équations différentielles ci-dessous, déterminer lesquelles peuvent se récrire comme des équations à variables séparées et lesquelles sont linéaires.

a) $y'(t) - 3y(t) = 0$

b) $y'(t) - 3y(t) = 1$

c) $y'(t) - 3y(t) = t$

d) $y'(t) + t^2y^2(t) = 0$

e) $y'(t) + t^2y^2(t) = t^2$

f) $y'(t) + t^2y^2(t) = t^3$

**Exercice 2. EDO linéaire à coefficients constants**

Résoudre le problème de Cauchy suivant:

$$\begin{cases} y'(t) = 3y(t) + 1 + t, \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

*Indication*: On peut procéder avec la formule du cours ou alors on peut trouver une solution particulière de la forme $y(t) = at + b$.

**Exercice 3. EDO linéaire à coefficients constants**

Résoudre le problème de Cauchy suivant:

$$\begin{cases} y'(t) = 3y(t) + 2\cos(t), \quad t \in \mathbb{R} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

*Indication*: On peut procéder avec la formule du cours ou alors on peut trouver une solution particulière de la forme $y(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$.

**Exercice 4. EDO linéaire à coefficients non-constants**

a) Trouver la solution générale de l'équation

$$y'(t) + \frac{\cos(t)}{\sin(t)}y(t) = t$$

sur l'intervalle $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

b) Donner la solution particulière de l'équation telle que $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

**Exercice 5. EDO linéaire à coefficients non-constants**

Trouver la solution générale de l'équation différentielle suivante, puis déterminer les solutions $y_1$ et $y_2$ définies par les conditions initiales données :

$$y'(t) - \frac{2}{t^2 - 1}\, y(t) = 1\,, \qquad y_1(0) = 1\,, \qquad y_2(2) = -6$$

**Exercice 6. Vous reprendrez bien quelques EDO?**

Résoudre les trois problèmes de Cauchy suivants

a) $y'(t) - \dfrac{3}{t}y(t) = t\,, \quad y(-2) = 4\,,$

b) $t\,y'(t) - 3y(t) = t^2\,, \quad y(0) = 0\,.$

c) $t\,y'(t) - 3y(t) = t^2\,, \quad y(0) = 1\,.$

**Exercice 7. Facultatif - dynamique des populations**

Dans la série 12-B, nous avions vu un modèle pour décrire la croissance d'une population dans un écosystème aux ressources limitées et sujette à la chasse de prédateurs. Sous certaines hypothèses (en particulier des échelles de temps "courtes" et un nombre de prédateurs supposés constant) ce modèle permettait de prédire l'évolution de la population.

En général, ce modèle n'est pas acceptable, car les diverses populations vont s'influencer. Un autre modèle, qui prend en compte l'évolution du nombre de prédateurs, en fonction du nombres proies, est le modèle suivant, appelé équations de Lokta-Volterra :

On note $x(t)$ la taille de la population des proies au temps $t$ et $y(t)$ la taille de la population de prédateurs au temps $t$. Les relations qui lient $x(t)$ et $y(t)$ s'écrivent comme une paire d'équations différentielles ordinaires :

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x(t) - \beta x(t)y(t) \\ y'(t) = \delta x(t)y(t) - \gamma y(t) \end{cases}$$

avec $t \in [0, T]$ et $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ des coefficients qui décrivent comment évoluent $x(t)$ et $y(t)$ (autrement dit donne $x'(t)$ et $y'(t)$):

- $\alpha$ : le taux de reproduction des proies. Le terme $\alpha x(t)$ décrit une croissance exponentielle des proies : en l'absence de prédateurs, les proies vont se reproduire sans limite.
- $\beta$ : le terme $-\beta x(t)y(t)$ décrit le nombre de rencontre possible entre les proies et les prédateurs (produit proies-prédateurs) et $-\beta$ représente le taux de proies mangées lors de ces rencontres.
- $\gamma$ : le taux de décroissance des prédateurs, en l'absence de proies $-\gamma y(t)$ décrit une décroissance du nombre de prédateurs : sans proies à manger, les prédateurs vont disparaitre.
- $\delta$ : du point de vue des prédateurs, les rencontres prédateurs-proies permettent aux prédateurs de se nourrir et donc de pouvoir survivre et continue à se reproduire (d'où un terme du type $x(t)y(t)$ contrairement au terme $-x(t)y(t)$ dans l'équation pour l'évolution du nombre de proies).

*Remarque :* on pourrait encore complexifier les équations en prenant en compte par exemple

- un limitation des ressources (c'est-à-dire la nourriture des proies) : même en l'absence des prédateurs, le nombre de proies ne peut pas exploser, car l'écosystème ne peut pas en accueillir plus que tant,
- une troisième équation qui décrit l'évolution de ces ressources (par exemple pour une forêt, des chenilles et des oiseaux, on pourrait décrire l'évolution du nombre d'arbres qui sont vus comme des proies des chenilles qui sont alors des prédateurs).
- des contraintes extérieurs : les activités humaines comme la chasse, la pêche, l'exploitation du milieu (bucheronnage etc...).

Le problème mathématique qui en découle est un **système d'EDOs** pour lequel ce que nous avons appris dans le chapitre 1 est généralisable. Le seul obstacle ici est que les équations sont non linéaires en raison des termes $x(t)y(t)$.

Dans plusieurs exercices consécutifs, nous allons essayer malgré tout de travailler ce système et d'en conclure quelque chose sur l'évolution des populations.

La première étape consiste à "linéariser le système" : on cherche un système linéaire qui approxime bien nos équations. On écrit le système comme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = F(x(t), y(t)) \quad (1)$$

où $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

a) Donner la fonction $F(x, y)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

b) Calculer la jacobienne de $F$.

c) Ecrire le système "approché"

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = F(x(t_0), y(t_0)) + \nabla F((x(t_0), y(t_0))\begin{pmatrix} x(t) - x(t_0) \\ y(t) - y(t_0) \end{pmatrix} \quad (2)$$

où $t_0$ est un temps quelconque, fixé. En fait, on a calculé le développement limité de $F$ à l'ordre 1, et on a remplacé $F(x(t), y(t))$ dans les équations par le développement limité de $F$ au voisinage de $(x(t_0), y(t_0))$ évalué en $(x(t), y(t))$.

Les solutions de (2) ne sont pas exactement les solutions de (1) mais en sont une "bonne" approximation.

# Réponses

---

**Exercice 1.**

a) linéaire et à variables séparées

b) linéaire et à variables séparées

c) linéaire, mais pas à variables séparées

d) non linéaire et à variables séparées

e) non linéaire et à variables séparées

f) non linéaires et pas à variables séparées

**Exercice 2.**
L'unique solution du problème donné est $y(t) = -\frac{1}{9}(5e^{3t} + 3t + 4)$.
**Exercice 3.**
L'unique solution du problème donné est $y(t) = \frac{1}{5}(\sin t - 3\cos t) + \frac{8}{5}e^{3t}$.
**Exercice 4.**

a) $y(t) = -t\dfrac{\cos(t)}{\sin(t)} + 1 + \dfrac{C}{\sin(t)}, C \in \mathbb{R}, t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

b) $y(t) = -t\dfrac{\cos(t)}{\sin(t)} + 1 - \dfrac{\sqrt{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)}{2\sin(t)} t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

**Exercice 5.**

- L'unique solution vérifiant $y_1(0) = 1$ est définie sur l'intervalle $]-1, 1[$ par

$$y_1(t) = \left[\, t - 1 + \ln(t-1)^2 \,\right] \frac{t-1}{t+1}.$$

- L'unique solution vérifiant $y_2(2) = -6$ est définie sur l'intervalle $]1, +\infty\,[$ par

$$y_2(t) = \left[\, t - 20 + \ln(t-1)^2 \,\right] \frac{t-1}{t+1}.$$

**Exercice 6.**

a) $y(t) = -t^2 - t^3, t \in ]-\infty, 0[$.

b) Il existe une inifinté de solutions, toutes de la forme $y(t) = t^2 - Ct^3, C \in \mathbb{R}$.

c) Il n'existe aucune solution.