Exercice 1. Échauffement
Donner les solutions générales des équations différentielles suivantes :

a) $y'(t) = a$, où $a \in \mathbb{R}$ est donné.

b) $y''(t) = 3\sin(t)$

c) $y'''(t) = 3t$

Correction.
Pour chaque équation, on intègre directement, autant de fois que nécessaire.

a) $y'(t) = a \Leftrightarrow y(t) = at + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

b) $y''(t) = 3\sin(t) \Leftrightarrow y'(t) = -3\cos(t) + a \Leftrightarrow y(t) = -3\sin(t) + at + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

c) $y'''(t) = 3t \Leftrightarrow y''(t) = \frac{3}{2}t^2 + a \Leftrightarrow y'(t) = \frac{1}{2}t^3 + at + b \Leftrightarrow y(t) = \frac{1}{8}t^4 + at^2 + bt + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ dont les valeurs peuvent changer d'une équivalence à une autre.

Exercice 2. Oscillateur harmonique
Soit $w \in \mathbb{R}$ et considérons l'équation différentielle

$$y''(t) + w^2 y(t) = 0.$$

a) Pour $w \neq 0$, vérifier que les fonctions $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $y(t) = C_1\cos(wt) + C_2\sin(wt)$ avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sont solution de l'équation différentielle.

b) Pour $w = 0$, trouver la solution générale de l'équation différentielle et déterminer l'intervalle maximal sur lequel elle est définie.

c) Donner la solution de l'équation différentielle

$$y''(t) + \frac{\pi^2}{4}y(t) = 0$$

qui satisfait les conditions initiales $y(1) = 3$ et $y'(1) = 2$.

Correction.

a) On vérifie que $y \in C^2(\mathbb{R})$ et que $y(t)$ vérifie l'équation pour tout $t \in R$.

b) On résout par intégration directe : $y''(t) = 0 \Leftrightarrow y'(t) = a \Leftrightarrow y(t) = at + b$ avc $a, b \in \mathbb{R}$. La solution est définie sur $\mathbb{R}$.

c) On utilise la solution $y(t) = C_1\cos(\frac{\pi}{2}t) + C_2\sin(\frac{\pi}{2}t)$ et on impose les valeurs initiales. On calcule : $y(1) = C_1\cos(\frac{\pi}{2}1) + C_2\sin(\frac{\pi}{2}1) = C_2$ d'où $C_2 = 3$. Puisque $y'(t) = -C_1\frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2}t) + C_2\frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}t)$, on a $y'(1) = -C_1\frac{\pi}{2}$ d'où $C_1 = -\frac{4}{\pi}$.

Exercice 3. EDO à variables séparables
Considérons l'équation différentielle suivante:

$$y'(t) = \frac{t^2}{y^2(t)}$$

a) Trouver la solution générale de l'équation.

b) Donner l'intervalle maximal sur lequel la solution générale est définie.

c) Trouver la solution particulière qui a comme condition initiale $y(1) = 2$.

Correction.

a) En multipliant par $y^2(t)$, on ramène le problème à l'équation

$$y^2(t)y'(t) = t^2$$

qui est à variables séparées. On écrit $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ et on calcule formellement

$$y^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = t^2 \rightsquigarrow y^2\mathrm{d}y = t^2\mathrm{d}t \rightsquigarrow \int y^2\mathrm{d}y = \int t^2\mathrm{d}t \rightsquigarrow \frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{3}t^3 + C \rightsquigarrow y^3 = t^3 + C, C \in \mathbb{R}.$$

La solution générale de cette EDO est donc $y(t) = \sqrt[3]{t^3 + C}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

b) L'intervalle maximal est $]-\infty, -\sqrt[3]{C}[$ ou $]-\sqrt[3]{C}, +\infty[$, y n'étant pas dérivable en $t = -\sqrt[3]{C}$.

c) On impose la condition initiale $y(1) = 2$ dans la solution générale :

$$y(1) = 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1 + C} = 2 \Leftrightarrow C = 7.$$

La solution est $y(t) = \sqrt[3]{t^3 + 7}$, sur l'intervalle $]-\sqrt[3]{7}, +\infty[$ (1 doit appartenir à l'intervalle).

Exercice 4. EDO à variables séparables

Considérons l'équation différentielle suivante:

$$y'(t) - \cos(t)y(t) + \cos(t)y^2(t) = 0$$

a) Trouver la solution générale de l'équation. On ne demande pas de déterminer l'intervalle maximal sur lequel la solution est définie.

b) Trouver la solution particulière qui a comme condition initiale $y(1) = 2$.

Correction.

a) L'équation peut se récrire comme

$$y'(t) = \cos(t)(y(t) - y^2(t)) \rightsquigarrow y' = \cos(t)(y - y^2)$$

qui peut s'écrire comme une équation à variables séparées si on peut diviser par $y - y^2 = y(1 - y)$. Ceci est possible à condition que y ne soit pas 0 ou 1. On distingue donc les cas :

Cas 1. Si $y(t) = 0$ ou $y(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, on vérifie que ce sont bien des solutions.

Cas 2.Si $y \neq 0$ et $y \neq 1$, on peut séparer les variables et on a

$$y' = \cos(t)(y - y^2) \Leftrightarrow \frac{y'}{y - y^2} = \cos(t)$$

$$\rightsquigarrow \frac{1}{y - y^2}\frac{dy}{dt} = \cos(t) \rightsquigarrow \frac{\mathrm{d}y}{y - y^2} = \cos(t)\mathrm{d}t \rightsquigarrow \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1 - y}\right)\mathrm{d}y = \cos(t)\mathrm{d}t.$$

On intègre pour obtenir

$$\int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}\right) \mathrm{d}y = \int \cos(t)\mathrm{d}t$$

$$\rightsquigarrow \ln|y| - \ln|1-y| = \sin(t) + C \rightsquigarrow \ln\left|\frac{y}{1-y}\right| = \sin(t) + C \rightsquigarrow \left|\frac{y}{1-y}\right| = Ce^{\sin(t)}, C \in \mathbb{R}_+^*.$$

Finalement on a trouvé que

$$\frac{y}{1-y} = \pm Ce^{\sin(t)}, C \in \mathbb{R}_+^*$$

d'où

$$\frac{y}{1-y} = Ce^{\sin(t)}, C \in \mathbb{R}^*.$$

En résolvant pour y, on trouve finalement la solution

$$y(t) = \frac{Ce^{\sin(t)}}{1 + Ce^{\sin(t)}}, C \in \mathbb{R}^*.$$

Le cas $y = 0$ pouvant s'inclure dans l'égalité précédente la solution générale et donc donnée par

$$y(t) = 1 \text{ ou } y(t) = \frac{Ce^{\sin(t)}}{1 + Ce^{\sin(t)}}, C \in \mathbb{R}.$$

b) Avec la condition initiale $y(1) = 2$ (qui ne peut pas être satisfaite par la solution constante $y(t) = 1$), on a

$$2 = \frac{Ce^{\sin(1)}}{1 + Ce^{\sin(1)}} \Leftrightarrow C = \frac{-2}{e^{\sin(1)}}.$$

D'où la solution du problème à valeur initiale est

$$y(t) = \frac{-2e^{\sin t - \sin 1}}{1 - 2e^{\sin t - \sin 1}}.$$

Exercice 5. EDO à variables séparables

Considérons l'équation différentielle suivante:

$$y'(t) = e^{-y(t)}$$

a) Trouver la solution générale de l'équation.

b) Donner l'intervalle maximal sur lequel la solution est définie.

c) Trouver la solution particulière qui a comme condition initiale $y(t_0) = y_0$.

Correction.

a) On multiplie l'équation par $e^{y(t)}$ pour se ramener à un problème à variables séparées :

$$y'(t) = e^{-y(t)} \Leftrightarrow e^{y(t)}y'(t) = 1.$$

Puis on procède par séparation des variables :

$$e^y y' = 1 \rightsquigarrow e^y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1 \rightsquigarrow e^y \mathrm{d}y = \mathrm{d}t \rightsquigarrow \int e^y \mathrm{d}y = \int \mathrm{d}t \rightsquigarrow e^y = t + C, C \in \mathbb{R}.$$

Finalement, la solution générale est donnée par $y(t) = \ln(t + C)$.

b) L'intervalle maximale est $]-C,+\infty[$.

c) On impose $y(t_0)=y_0$ dans la solution générale :

$$y_0=\ln(t_0+C)\Leftrightarrow C=e^{y_0}-t_0.$$

La solution est donc

$$y(t)=\ln(t+e^{y_0}-t_0),t\in]t_0-e^{y_0},+\infty[.$$

Exercice 6. EDO à variables séparables

Trouver la solution maximale du problème de Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t)=\dfrac{3}{t(1+y(t))} \\ \\ y(1)=0 \end{cases}$$

Correction.

On cherche tout d'abord la solution générale du problème sans valeur initiale en procédant par séparation des variables. L'équation devient

$$(1+y(t))y'(t)=\frac{3}{t}\rightsquigarrow(1+y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{3}{t}$$
$$\rightsquigarrow(1+y)\mathrm{d}y=\frac{3}{t}\mathrm{d}t\rightsquigarrow\int(1+y)\mathrm{d}y=3\int\frac{1}{t}\mathrm{d}t\rightsquigarrow y+\frac{1}{2}y^2=3\ln(|t|)+C,C\in\mathbb{R}.$$

On résout pour y en imposant que le discriminant soit positif pour tout t :

$$\Delta=1+6\ln(|t|)+2C\geq0\Leftrightarrow|t|\geq e^{\frac{-C}{3}-\frac{1}{6}}\Leftrightarrow t\geq e^{\frac{-C}{3}-\frac{1}{6}}\text{ ou }t\leq-e^{\frac{-C}{3}-\frac{1}{6}}.$$

On a donc deux familles de solutions, définies sur deux intervalles maximaux possibles (que l'on choisit ouvert toujours pour garantir la dérivabilité) : $y(t)=-1\pm\sqrt{1+6\ln(|t|)+2C},I_1=]-\infty,e^{\frac{-C}{3}-\frac{1}{6}}[,I_2=]e^{\frac{-C}{3}-\frac{1}{6}},+\infty[,C\in\mathbb{R}$.

A présent, puisque l'on veut satisfaire $y(1)=0$, on doit avoir que

$$0=-1\pm\sqrt{1+2C}.$$

Comme la racine est toujours positive, ou nulle, on ne peut garder que la solution avec le "+" et ainsi $C=0$. D'où, on trouve que $y(t)=-1+\sqrt{1+6\ln(|t|)}$. Ceci implique aussi que le bon intervalle maximal sur lequel définir y est $]e^{\frac{-1}{6}},+\infty[$ car $e^{\frac{-1}{6}}<1$ (on souhaite que 1 appartienne à l'intervalle).

Exercice 7. EDO à variables séparables

Trouver la solution maximale du problème de Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t)=\dfrac{y(t)e^{2t}}{1+e^{2t}} \\ \\ y(0)=1 \end{cases}$$

Correction.

On commence par chercher la solution générale de l'équation sans valeur initiale par la méthode de séparations des variables. Si y n'est pas nulle, on peut diviser l'équation et obtenir une équation à variables séparées. On a donc deux cas

Cas 1. $y(t)=0$ pour tout $t\in R$ est solution de l'équation sans valeur initiale.

Cas 2. $y\neq0$ et on divise par y et l'équation devient

$$\frac{y'}{y}=\frac{e^{2t}}{1+e^{2t}} \rightsquigarrow \frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{e^{2t}}{1+e^{2t}} \rightsquigarrow \frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{e^{2t}}{1+e^{2t}}\mathrm{d}t \rightsquigarrow \int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int\frac{e^{2t}}{1+e^{2t}}\mathrm{d}t$$
$$\rightsquigarrow \ln|y(t)|=\frac{1}{2}\ln|1+e^{2t}|+C, C\in\mathbb{R} \rightsquigarrow |y(t)|=e^C\sqrt{1+e^{2t}}, C\in R$$
$$\rightsquigarrow y(t)=\pm C\sqrt{1+e^{2t}}, C\in\mathbb{R}_+^* \rightsquigarrow y(t)=C\sqrt{1+e^{2t}}, C\in\mathbb{R}^*.$$

Finalement la solution $y=0$ peut être incluse dans ce qui précède en posant $C=0$. La solution générale est donc donnée par

$$y(t)=C\sqrt{1+e^{2t}}, C\in\mathbb{R}$$

qui est définie et continûment différentiable sur tout $\mathbb{R}$.

On impose pour terminer la condition initiale $y(0)=1$ ce qui implique que

$$1=C\sqrt{2}\Leftrightarrow C=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

d'où la solution maximale recherchée est

$$y(t)=\frac{\sqrt{1+e^{2t}}}{\sqrt{2}}, t\in\mathbb{R}.$$

Exercice 8. Facultatif - un modèle d'écologie - croissance de population

L'étude de la croissance ou la décroissance des populations animales, végétales, etc. dans un écosystème est aujourd'hui un enjeu crucial en écologie. On observe la disparition de certaines espèces ou au contraire le surdéveloppement d'espèces non indigènes introduites délibérément ou par accident. En général, la dynamique des différentes espèces dans un écosystème est décrite par un ensemble complexe d'équations différentielles car chaque population influence toutes les autres.

Parfois, ou sous certaines hypothèses, on peut simplifier la discussion et décrire l'évolution d'une population à l'aide d'un modèle plus simple. C'est par exemple le cas de la croissance d'une population de chenilles, dans un milieu de conifères, chassées par des oiseaux.

Le modèle ci-dessous a été introduit pour étudier la croissance de la population de chenilles de l'épicéa, qui cause pérodiquement de gros ravages en Amérique du nord lorsque cette dernière devient trop importante [Ludwig, Jones, Holling, 1978]. Les chenilles se nourrissent des épicéas, et sont mangées à leurs tours par les oiseaux. Le modèle proposé se base sur l'hypothèse que la densité de la forêt et le nombre des prédateurs sont constants et ne sont pas influencés par la taille de la population d'insectes. Une justification est la suivante :

- La croissance/décroissance de la population de chenilles est un cycle de quelques mois, alors que la destruction/le renouvellement de la forêt se chiffre en année.
- La population de prédateurs est peu influencée par celle des chenilles car ils ne se nourrissent pas que de cette espèce. S'il y a pas de chenilles de l'épicéa, ils iront manger d'autres espèces.

Donc, sur une échelle de temps assez courte, on peut considérer que tant la population d'arbres que celles des oiseaux est constante. Le modèle avancé est le suivant : on note $y(t)$ le nombre d'individus dans la population de chenilles que l'on cherche comme la solution de

$$y'(t)=ry(t)\left(1-\frac{y(t)}{K}\right)-\frac{By^2(t)}{A+y^2(t)}$$

muni de la valeur initiale (nombre de chenilles observé à un instant t_0) $y(t_0)=y_0$. Ici t est compté en mois.

Voici quelques explications sur la nature de ce modèle :

- le facteur $ry(t)$ avec $r > 0$ décrit que la population de chenille croit exponentiellement (la génération suivante est un multiple de la génération précédente).
- le facteur $1 - \frac{y(t)}{K}$ où $K > 0$ est le nombre maximal d'individus, dépendant des ressources à disposition (i.e. la taille de la forêt) contrôle cette croissance exponentielle : quand $y(t) > K$, ce facteur devient négatif, et force la population à décroitre. Le nombre de chenilles ne peut pas exploser trop.
- Le terme $-\frac{By^2(t)}{A+y^2(t)}$ décrit l'influence des prédateurs. $B > 0$ est le nombre de prédateurs et $A > 0$ décrit la pression qu'ils exercent sur leurs proies. Ce terme est choisi sous cette forme pour deux raisons : plus $y(t)$ est petit, moins il a d'importance (moins il y a de chenilles, mieux la forêt les cache et donc moins les prédateurs les mangent). Au contraire, si le nombre de chenilles tend vers $+\infty$, ce terme est borné : les oiseaux ne peuvent pas manger plus de chenilles que tant.

Les quantités K, A, B, r sont déterminées par l'observation. Ici, pour l'exercices, on va considérer des valeurs simples pour pouvoir calculer la solution (dans la pratique, on peut par une mise à l'échelle des quantités arriver à quelque chose de similaire). De plus, on va imaginer que le terme décrivant l'impact des prédateurs est déjà arrivé à son régime maximum. On a

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{By^2}{A+y^2} = B.$$

On approxime donc le terme $-\frac{By^2(t)}{A+y^2(t)}$ par $-B$ en imaginant que la population est déjà assez conséquente pour que le nombre de proies mangées soit proche du maximum possible (on peut sinon choisir de poser $A = 0$ et le terme $-\frac{By^2(t)}{A+y^2(t)}$ est toujours égal $-B$ pour $y \neq 0$). L'équation sera plus simple ainsi, et nous pourrons la résoudre à la main.

Ici on va considérer le problème avec $r = 0.25$, $K = \frac{64}{3}$ (l'écosystème peut accueillir en moyenne 21 individus) et $B = 1$ (il y a un seul prédateur).

Si le paragraphe précédent n'est pas très convaincant, changeons d'univers et plutôt que des chenilles mangeant des épicéa pourchassées par des oiseaux, imagineons des Chenipans, dans la forêt de Jade, pourchassés par un Piafabec...

Le problème considéré est alors le suivant : chercher la solution $y(t)$ du problème à valeur initale

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{1}{4}y(t)\left(1 - \dfrac{3y(t)}{64}\right) - 1 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Résoudre le problème et représenter la solution graphiquement pour $y_0 = 5, y_0 = 6, y_0 = 20$ (par exemple en utilisant le calculateur graphique DESMOS disponible sur le web). Que peut-on conclure sur le comportement de $y(t)$ en fonction du choix de y_0?

Correction.

On résout le problème à valeur initiale

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{1}{4}y(t)\left(1 - \dfrac{3y(t)}{64}\right) - 1 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

L'équation est à variable séparée et s'écrit après factorisation

$$y' = \frac{-1}{256}(y-16)(3y-16).$$

On procède par séparation des variables en excluant les solutions constantes $y = 16$ ou $y = \frac{16}{3}$ (nous y reviendrons plus tard).

On calcule

$$y' = \frac{-1}{256}(y-16)(3y-16) \rightsquigarrow \frac{y'}{(y-16)(3y-16)} = \frac{-1}{256}$$
$$\rightsquigarrow \frac{\mathrm{d}y}{(y-16)(3y-16)} = \frac{-1}{256}\mathrm{d}t \rightsquigarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{(y-16)(3y-16)} = \int \frac{-1}{256}\mathrm{d}t$$

En procédant par éléments simples, on trouve

$$\int \frac{1}{32}\left[\frac{1}{y-16} - \frac{3}{3y-16}\right]\mathrm{d}y = \int \frac{-\mathrm{d}t}{256} \rightsquigarrow \frac{1}{32}\left[\ln|y-16| - \ln|3y-16|\right] = \frac{-t}{256} + C, C \in \mathbb{R}$$
$$\rightsquigarrow \ln\left|\frac{y-16}{3y-16}\right| = \frac{-t}{8} + C, C \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \frac{y-16}{3y-16} = Ce^{-\frac{t}{8}}, C \in \mathbb{R}_+^*.$$

En résolvant pour y, on trouve que

$$y(t) = \frac{16 - 16Ce^{-\frac{t}{8}}}{1 - 3Ce^{-\frac{t}{8}}}.$$

Finalement, si on souhaite que $y(0) = y_0$, on trouve que $C = \frac{16-y_0}{16-3y_0}$.

On graphe pour $y_0 = 5, 6, 20$, les solutions y_5,y_6 et y_{20}, ainsi que les solutions constantes $y_{16/3}$ et y_{16}.

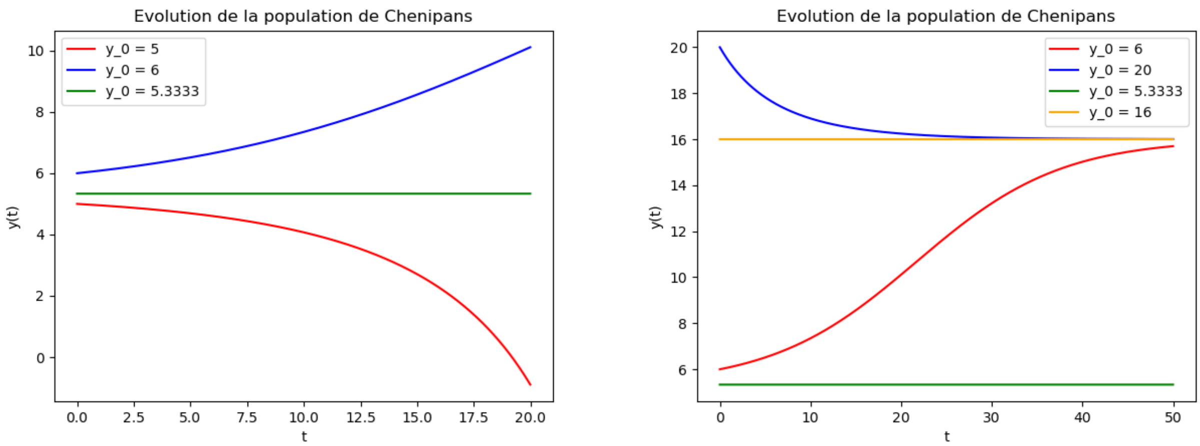


Figure 1: Evolution de la population de Chenipans pour différentes conditions initiales.

On observe quatre comportements différents.

a) Si au départ, la population est égale à la solution constante $\frac{16}{3}$ ou 16, la population n'évolue pas. On parle d'équilibre ou de solution stationnaire.

b) Si au départ la population de Chenipans est inférieure à $\frac{16}{3}$, l'impact du Piafabec est tel que la population finit par disparaître (il n'y a pas assez d'individus au départ pour compenser ceux qui seront mangés). On assiste à un processus d'extinction.

c) Si au départ la population est entre $\frac{16}{3}$ (disons au moins 6) alors la population va croître jusqu'à atteindre un nombre limite de 16 (ce nombre est donné par l'impact du Piafabec et le nombre maximal d'individu que peut accueillir l'écosystème).

d) Si au départ la population est supérieure à 16, les Chenipans sont trop facilement visibles et se font manger par le Piafabec. Cependant l'impact du Piafabec est borné : la population va décroitre mais ne peut pas chuter plus bas que tant.

Evidemment, il s'agit d'une situation imagée, mais ces phénomènes sont les mêmes dans une situation réelle avec des chenilles, des épicéa et une forêt.

Ces comportements sont anticipables en observant l'équation différentielle. Rappelons-nous que

$$y'(t) = \frac{-1}{256}(y(t) - 16)(3y(t) - 16).$$

Cette équation nous donne la valeur de la dérivée en tout temps, qui est le taux de croissance de la population. En particulier, on connait à chaque instant t le signe de la dérivée (donc si la population va croitre ou décroitre). En analysant un peu plus précisément le terme de droite et la fonction $P(y) = \frac{-1}{256}(y - 16)(3y - 16)$ que l'on graphe si dessous, on peut tirer quelques observations. C'est une parabole qui s'annule en 16/3 et 16 et qui est positive entre les deux racines.

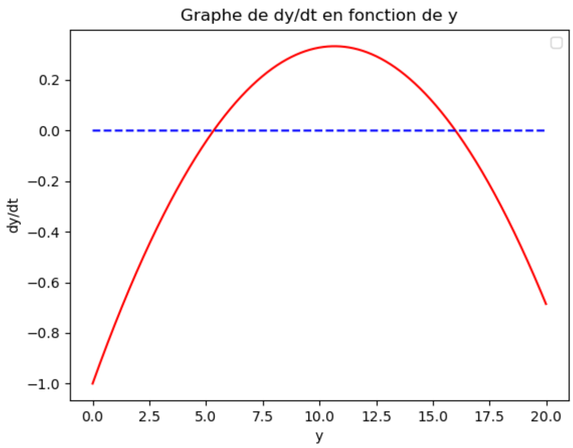


Figure 2: Parabole $P(y) = \frac{-1}{256}(y(t) - 16)(3y(t) - 16)$

Comme $y' = P(y)$ à chaque instant t (c'est littéralement le sens de l'équation différentielle), on peut établir les situations suivantes :

a) Si à un instant t (par exemple en $t = 0$), la population compte $\frac{16}{3}$ ou 16 individus (les racines du polynôme $P(y)$), alors la croissance de la population $y'(t)$ vaut zéro : la dérivée est nulle, donc la population ne grandit pas ni ne diminue.

b) Si à un instant t (par exemple en $t = 0$), la population compte moins de $\frac{16}{3}$ individus, alors la dérivée $y'(t)$ est négative : la population va décroitre jusqu'à atteindre 0.

c) Si à un instant t (par exemple en $t = 0$), la population un nombre d'indivus entre $\frac{16}{3}$ et 16, alors la dérivée $y'(t)$ est positive : la population va croitre jusqu'à atteindre l'équilibre le plus proche, à savoir 16 individus, où $y' = 0$ et donc la population n'évolue plus.

d) Si à un instant t (par exemple en $t = 0$), la population compte plus de 16 individus, alors la dérivée $y'(t)$ est négative : la population va décroitre jusqu'à atteindre l'équilibre le plus proche, à savoir 16 individus, où $y' = 0$ et donc la population cesse de décroitre.

Exercice 9. Révisions - Changement de variable dans $\mathbb{R}^2$

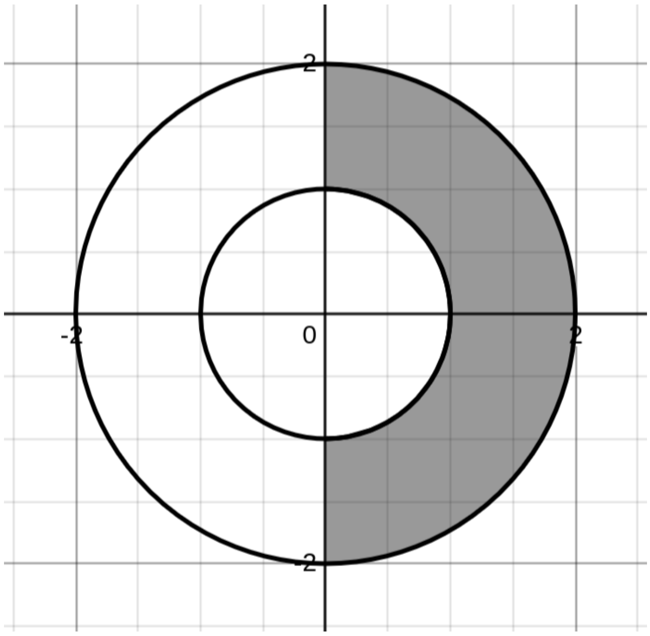
Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Calculer

$$\iint_D xy^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Correction.

On esquisse tout d'abord le domaine

On passe en coordonnées polaires : $(x, y) = \Phi(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta)$. Le jacobien est r. Le domaine D s'écrit comme $D = \Phi(\tilde{D})$ avec



$$\tilde{D} = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq r \leq 2, \theta \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right\}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\iint_D xy^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 r^4 \cos\theta \sin^2\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin^2\theta \mathrm{d}\theta \int_1^2 r^4 \mathrm{d}r \\
&= \left[\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{5}r^5\right]_{r=1}^{r=2} \\
&= \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{32}{5}-\frac{1}{5}\right) \\
&= \frac{62}{15}
\end{aligned}$$

Remarque : pour trouver les bornes en coordonnées polaires (si on ne le voit pas sur le desssin) on peut aussi résoudre les conditions qui décrivent D. On pose $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$ (par exemple). Nos conditions deviennent

$$\begin{aligned}
x \geq 0 &\Leftrightarrow r\cos\theta \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \cos\theta \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]
\end{aligned}$$

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq r \leq 2$$

Notons qu'on peut changer l'intervalle pour θ en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, par périodicité de $\cos\theta$. (C'est l'intervalle qu'on aurait trouvé si on avait pris $\theta \in [-\pi, \pi]$ au moment de passer en coordonnées polaires). On peut également conservé $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ en calculant l'intégrale deux fois (une fois dans chaque intervalle) et sommant les intégrales.

Exercice 10. Révisions - Changement de variable dans $\mathbb{R}^3$

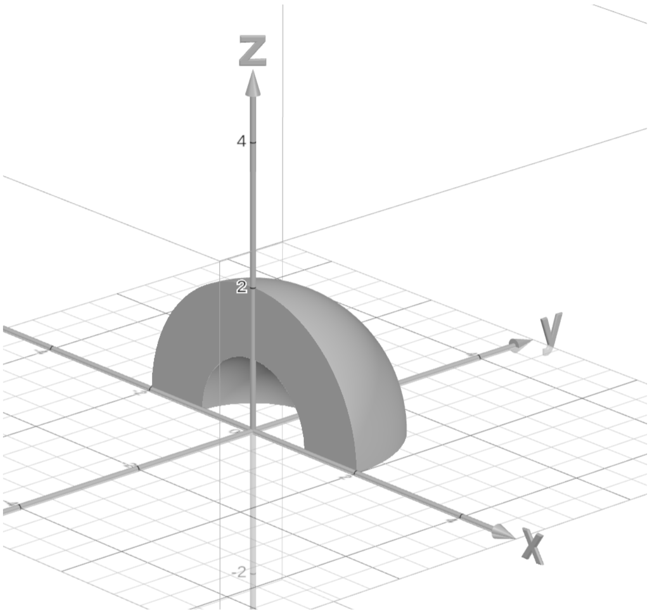
Pour les ensembles E et les fonctions f données ci-dessous, calculer $\iiint_E f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

a) $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y \geq 0, z \geq 0, \ 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4\right\}$ et $f(x,y,z) = \frac{x^2+y^2+z}{(x^2+y^2+z^2)^2}$.

b) $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1 + \sqrt{x^2+y^2} - x^2 - y^2\right\}$ et $f(x,y,z) = 1$.

Correction.

a) On passe en coordonnées sphériques : $(x,y,z) = \Phi(r,\varphi,\theta) = (r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)$, $r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ et $0 \leq \theta \leq \pi$. Le jacobien est $r^2\sin(\theta)$. On esquisse le domaine



Le domaine E s'écrit comme $\Phi(\tilde{E})$ avec $\tilde{E}$ donné par

$$\tilde{E} = \left\{(r,\varphi,\theta) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq r \leq 2, \varphi \in [0,\pi], \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\}.$$

$$\begin{aligned}
\iiint_E \frac{x^2+y^2+z}{(x^2+y^2+z^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_1^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \frac{r^2\sin^2\theta + r\cos\theta}{r^4} r^2\sin(\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \int_0^{\pi} \sin^3\theta + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \sin^3\theta + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta + [\log(r)]_{r=1}^{r=2}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta \\
&= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta + \log(2)\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta \\
&= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\theta)\sin\theta + \log(2)\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta \\
&= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi - \cos^2\varphi\sin\varphi + \log(2)\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta \\
&= \pi \left[-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta + \frac{\log(2)}{2}\sin^2\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \\
&= \pi \left(0 + 0 + \frac{\log(2)}{2} + 1 - \frac{1}{3} - 0\right) \\
&= \pi \left(\frac{\log(2)}{2} + \frac{2}{3}\right)
\end{aligned}$$

Remarque : pour trouver les bornes on peut aussi résoudre les conditions qui décrivent E. On doit avoir

$$\begin{aligned}
y \geq 0 \Leftrightarrow & r \sin\varphi \sin\theta \geq 0 \\
\overset{r\sin\theta \geq 0}{\Leftrightarrow} & \sin\varphi \geq 0 \\
\Leftrightarrow & \varphi \in [0, \pi]
\end{aligned}$$

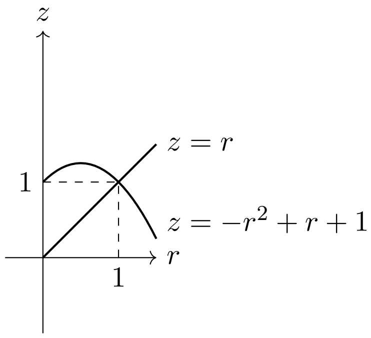
$$\begin{aligned}
z \geq 0 \Leftrightarrow & r\cos\theta \geq 0 \\
\Leftrightarrow & \cos\theta \geq 0 \\
\Leftrightarrow & \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]
\end{aligned}$$

$$1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq r \leq 2$$

b) On passe en coordonnées cylindriques : $(x, y, z) = \Phi(r, \theta, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$. Les conditions qui décrivent E s'écrivent

$$\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1 + \sqrt{x^2+y^2} - x^2 - y^2 \Leftrightarrow r \leq z \leq -r^2 + r + 1$$

Pour trouver des bornes sur r ou z, on fait un dessin dans le plan r, z :



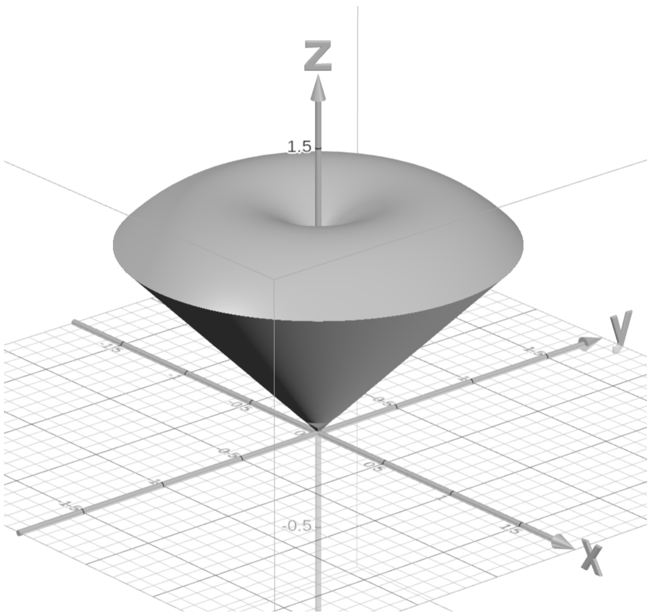
On en déduit donc que E est obtenu comme $\Phi(\tilde{E})$ avec

$$\tilde{E} = \left\{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi], r \leq z \leq -r^2 + r + 1\right\}$$

qui est représenté ci-dessous

On a donc,

$$\begin{aligned}
\iiint_E f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = & \int_0^1 \int_r^{-r^2+r+1} \int_0^{2\pi} r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\mathrm{d}r \\
= & 2\pi \int_0^1 (-r^3 + r)\mathrm{d}r \\
= & 2\pi \left[-\frac{1}{4}r^4 + \frac{1}{2}r^2\right]_{r=0}^{r=1} \\
= & \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$


z
1.5
y
x
-0.5