Exercice 1. Échauffement
Donner les solutions générales des équations différentielles suivantes :

a) $y'(t) = a$, où $a \in \mathbb{R}$ est donné.

b) $y''(t) = 3\sin(t)$

c) $y'''(t) = 3t$

Exercice 2. Oscillateur harmonique
Soit $w \in \mathbb{R}$ et considérons l'équation différentielle

$$y''(t) + w^2 y(t) = 0.$$

a) Pour $w \neq 0$, vérifier que les fonctions $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $y(t) = C_1\cos(wt) + C_2\sin(wt)$ avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sont solution de l'équation différentielle.

b) Pour $w = 0$, trouver la solution générale de l'équation différentielle et déterminer l'intervalle maximal sur lequel elle est définie.

c) Donner la solution de l'équation différentielle

$$y''(t) + \frac{\pi^2}{4} y(t) = 0$$

qui satisfait les conditions initiales $y(1) = 3$ et $y'(1) = 2$.

Exercice 3. EDO à variables séparables
Considérons l'équation différentielle suivante:

$$y'(t) = \frac{t^2}{y^2(t)}$$

a) Trouver la solution générale de l'équation.

b) Donner l'intervalle maximal sur lequel la solution générale est définie.

c) Trouver la solution particulière qui a comme condition initiale $y(1) = 2$.

Exercice 4. EDO à variables séparables
Considérons l'équation différentielle suivante:

$$y'(t) - \cos(t)y(t) + \cos(t)y^2(t) = 0$$

a) Trouver la solution générale de l'équation. On ne demande pas de déterminer l'intervalle maximal sur lequel la solution est définie.

b) Trouver la solution particulière qui a comme condition initiale $y(1) = 2$.

Exercice 5. EDO à variables séparables
Considérons l'équation différentielle suivante:

$$y'(t) = e^{-y(t)}$$

a) Trouver la solution générale de l'équation.

b) Donner l'intervalle maximal sur lequel la solution est définie.

c) Trouver la solution particulière qui a comme condition initiale $y(t_0) = y_0$.

Exercice 6. EDO à variables séparables

Trouver la solution maximale du problème de Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{3}{t(1+y(t))} \\ \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Exercice 7. EDO à variables séparables

Trouver la solution maximale du problème de Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{y(t)e^{2t}}{1+e^{2t}} \\ \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Exercice 8. Facultatif - un modèle d'écologie - croissance de population

L'étude de la croissance ou la décroissance des populations animales, végétales, etc. dans un écosystème est aujourd'hui un enjeu crucial en écologie. On observe la disparition de certaines espèces ou au contraire le surdéveloppement d'espèces non indigènes introduites délibérément ou par accident. En général, la dynamique des différentes espèces dans un écosystème est décrite par un ensemble complexe d'équations différentielles car chaque population influence toutes les autres.

Parfois, ou sous certaines hypothèses, on peut simplifier la discussion et décrire l'évolution d'une population à l'aide d'un modèle plus simple. C'est par exemple le cas de la croissance d'une population de chenilles, dans un milieu de conifères, chassées par des oiseaux.

Le modèle ci-dessous a été introduit pour étudier la croissance de la population de chenilles de l'épicéa, qui cause pérodiquement de gros ravages en Amérique du nord lorsque cette dernière devient trop importante [Ludwig, Jones, Holling, 1978]. Les chenilles se nourrissent des épicéas, et sont mangées à leurs tours par les oiseaux. Le modèle proposé se base sur l'hypothèse que la densité de la forêt et le nombre des prédateurs sont constants et ne sont pas influencés par la taille de la population d'insectes. Une justification est la suivante :

- La croissance/décroissance de la population de chenilles est un cycle de quelques mois, alors que la destruction/le renouvellement de la forêt se chiffre en année.
- La population de prédateurs est peu influencée par celle des chenilles car ils ne se nourrissent pas que de cette espèce. S'il y a pas de chenilles de l'épicéa, ils iront manger d'autres espèces.

Donc, sur une échelle de temps assez courte, on peut considérer que tant la population d'arbres que celles des oiseaux est constante. Le modèle avancé est le suivant : on note $y(t)$ le nombre d'individus dans la population de chenilles que l'on cherche comme la solution de

$$y'(t) = ry(t)\left(1 - \frac{y(t)}{K}\right) - \frac{By^2(t)}{A + y^2(t)}$$

muni de la valeur initiale (nombre de chenilles observé à un instant t_0) $y(t_0) = y_0$. Ici t est compté en mois.

Voici quelques explications sur la nature de ce modèle :

- le facteur $ry(t)$ avec $r > 0$ décrit que la population de chenille croit exponentiellement (la génération suivante est un multiple de la génération précédente).

- le facteur $1 - \frac{y(t)}{K}$ où $K > 0$ est le nombre maximal d'individus, dépendant des ressources à disposition (i.e. la taille de la forêt) contrôle cette croissance exponentielle : quand $y(t) > K$, ce facteur devient négatif, et force la population à décroitre. Le nombre de chenilles ne peut pas exploser trop.

- Le terme $-\frac{By^2(t)}{A+y^2(t)}$ décrit l'influence des prédateurs. $B > 0$ est le nombre de prédateurs et $A > 0$ décrit la pression qu'ils exercent sur leurs proies. Ce terme est choisi sous cette forme pour deux raisons : plus $y(t)$ est petit, moins il a d'importance (moins il y a de chenilles, mieux la forêt les cache et donc moins les prédateurs les mangent). Au contraire, si le nombre de chenilles tend vers $+\infty$, ce terme est borné : les oiseaux ne peuvent pas manger plus de chenilles que tant.

Les quantités K, A, B, r sont déterminées par l'observation. Ici, pour l'exercices, on va considérer des valeurs simples pour pouvoir calculer la solution (dans la pratique, on peut par une mise à l'échelle des quantités arriver à quelque chose de similaire). De plus, on va imaginer que le terme décrivant l'impact des prédateurs est déjà arrivé à son régime maximum. On a

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{By^2}{A + y^2} = B.$$

On approxime donc le terme $-\frac{By^2(t)}{A+y^2(t)}$ par $-B$ en imaginant que la population est déjà assez conséquente pour que le nombre de proies mangées soit proche du maximum possible (on peut sinon choisir de poser $A = 0$ et le terme $-\frac{By^2(t)}{A+y^2(t)}$ est toujours égal $-B$ pour $y \neq 0$). L'équation sera plus simple ainsi, et nous pourrons la résoudre à la main.

Ici on va considérer le problème avec $r = 0.25$, $K = \frac{64}{3}$ (l'écosystème peut accueillir en moyenne 21 individus) et $B = 1$ (il y a un seul prédateur).

Si le paragraphe précédent n'est pas très convaincant, changeons d'univers et plutôt que des chenilles mangeant des épicéa pourchassées par des oiseaux, imagineons des Chenipans, dans la forêt de Jade, pourchassés par un Piafabec...

Le problème considéré est alors le suivant : chercher la solution $y(t)$ du problème à valeur initale

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{1}{4} y(t) \left(1 - \frac{3y(t)}{64}\right) - 1 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Résoudre le problème et représenter la solution graphiquement pour $y_0 = 5, y_0 = 6, y_0 = 20$ (par exemple en utilisant le calculateur graphique DESMOS disponible sur le web). Que peut-on conclure sur le comportement de $y(t)$ en fonction du choix de y_0?

Exercice 9. Révisions - Changement de variable dans $\mathbb{R}^2$

Soit $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}$. Calculer

$$\iint_D xy^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Exercice 10. Révisions - Changement de variable dans $\mathbb{R}^3$

Pour les ensembles E et les fonctions f données ci-dessous, calculer $\displaystyle\iiint_E f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

a) $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y \geq 0, z \geq 0,\ 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\right\}$ et $f(x, y, z) = \frac{x^2+y^2+z}{(x^2+y^2+z^2)^2}$.

b) $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1 + \sqrt{x^2 + y^2} - x^2 - y^2\right\}$ et $f(x, y, z) = 1$.

Réponses

Exercice 1.

a) $y(t) = at + c$

b) $y(t) - 3\sin(t) + at + b$

c) $y(t) = \frac{1}{8}t^4 + at^2 + bt + c$

Exercice 2.

b) $y(t) = at + b$. L'intervalle maximal est $\mathbb{R}$.

c) $y(t) = -\frac{4}{\pi}\cos(\frac{\pi}{2}t) + 3\sin(\frac{\pi}{2}t), t \in \mathbb{R}$

Exercice 3.

a) $y(t) = \sqrt[3]{t^3 + C}$, $C \in \mathbb{R}$.

b) L'intervalle maximal est $]-\infty, -\sqrt[3]{C}[$ ou $]-\sqrt[3]{C}, +\infty[$.

c) $y(t) = \sqrt[3]{t^3 + 7}, t \in]-\sqrt[3]{7}, +\infty[$.

Exercice 4.

a) $y(t) = \dfrac{Ce^{\sin t}}{1 + Ce^{\sin t}}, C \in \mathbb{R}$ ou $y(t) = 1$.

b) $y(t) = \dfrac{-2e^{\sin t - \sin 1}}{1 - 2e^{\sin t - \sin 1}}$

Exercice 5.

a) $y(t) = \ln(t + C)$ pour $C \in \mathbb{R}$.

b) L'intervalle maximal est $I =]-C, +\infty[$.

c) $y(t) = \ln(t + e^{y_0} - t_0), t \in]t_0 - e^{y_0}, +\infty[$

Exercice 6.

$$y(t) = -1 + \sqrt{1 + 6\ln t}, t \in]e^{-1/6}, +\infty[.$$

Exercice 7.

$$y(t) = \sqrt{\frac{1 + e^{2t}}{2}}, t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 9.

$$\iint_D xy^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{62}{15}.$$

Exercice 10.

a) $\displaystyle\iiint_E f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pi\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\ln 2\right)$.

b) $\mathrm{vol}(E) = \dfrac{\pi}{2}$.