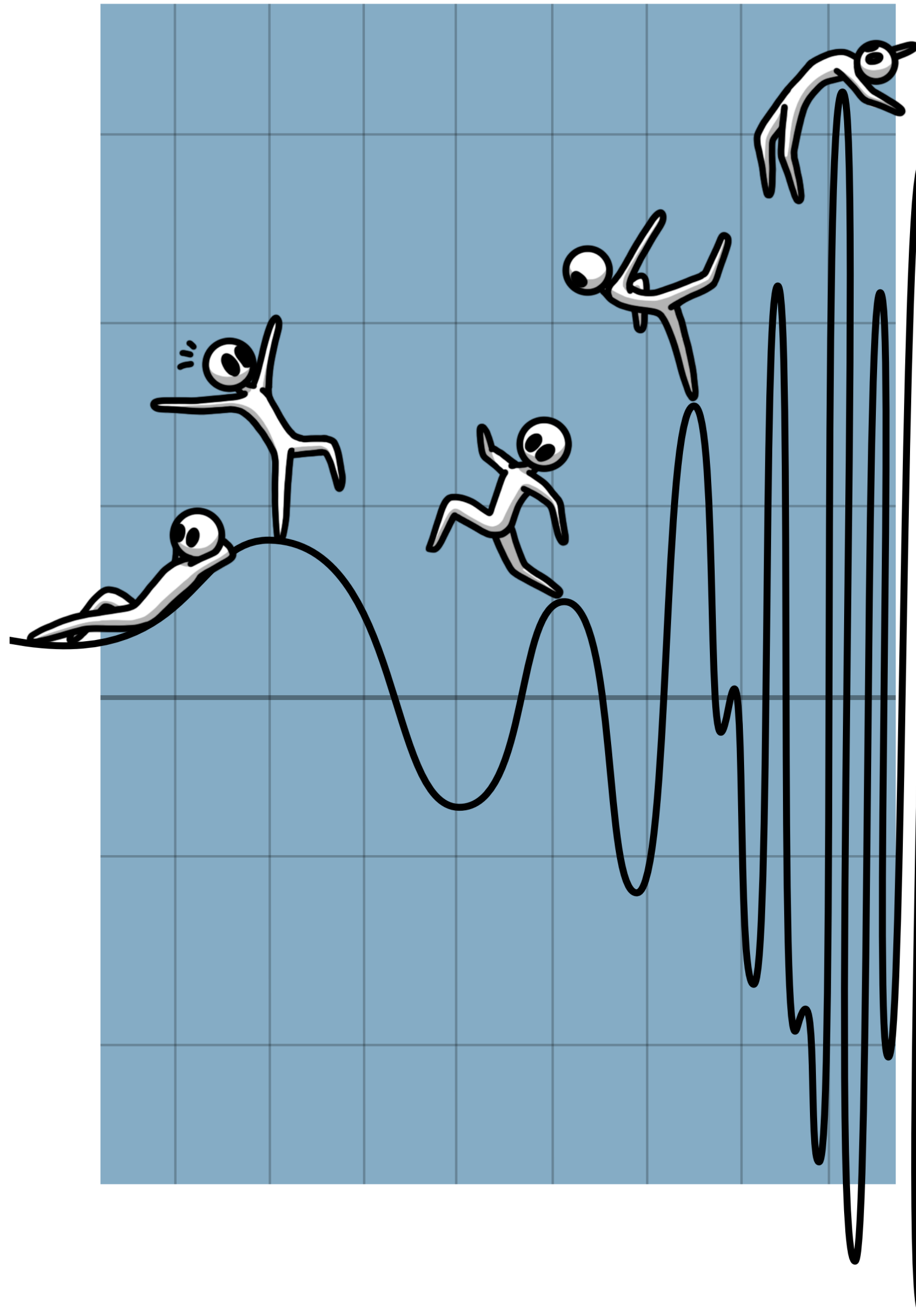


- Lors du cours sur la représentation binaire, nous avons vu comment représenter des nombres avec des suites de 0 et de 1.
- Aujourd'hui, nous allons voir comment représenter des objets plus complexes, comme des *signaux physiques* (sons ou images), avec ces mêmes suites de 0 et de 1.
- Et tout aussi important (voire plus!), nous verrons la semaine prochaine comment *restituer* un signal physique à partir d'une suite de 0 et de 1.



# Information, Calcul et Communication

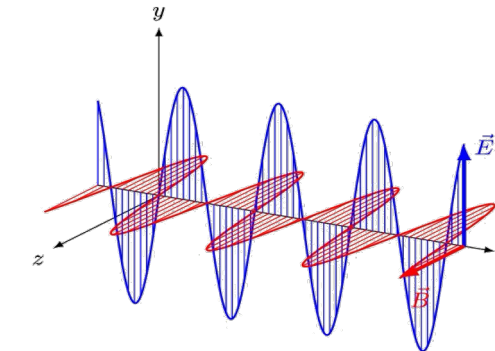
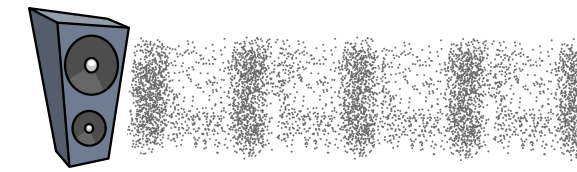
Signaux, fréquences  
et bande passante

Olivier Lévêque

# Qu'est-ce qu'un signal ? C'est une fonction !

## Exemples:

1. Une onde sonore ( $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ )
  - $t = \text{temps}$ ,  $X(t) = \text{pression}$
2. Une onde électromagnétique ( $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ )
3. Une photo noir-blanc ( $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ )
  - $(u, v) = \text{coordonnées}$ ,  $X(u, v) = \text{niveau de gris}$
4. Une photo couleur ( $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ )
  - $(u, v) \rightarrow (X_{\text{rouge}}(u, v), X_{\text{vert}}(u, v), X_{\text{bleu}}(u, v))$
5. Une vidéo ( $X : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ )

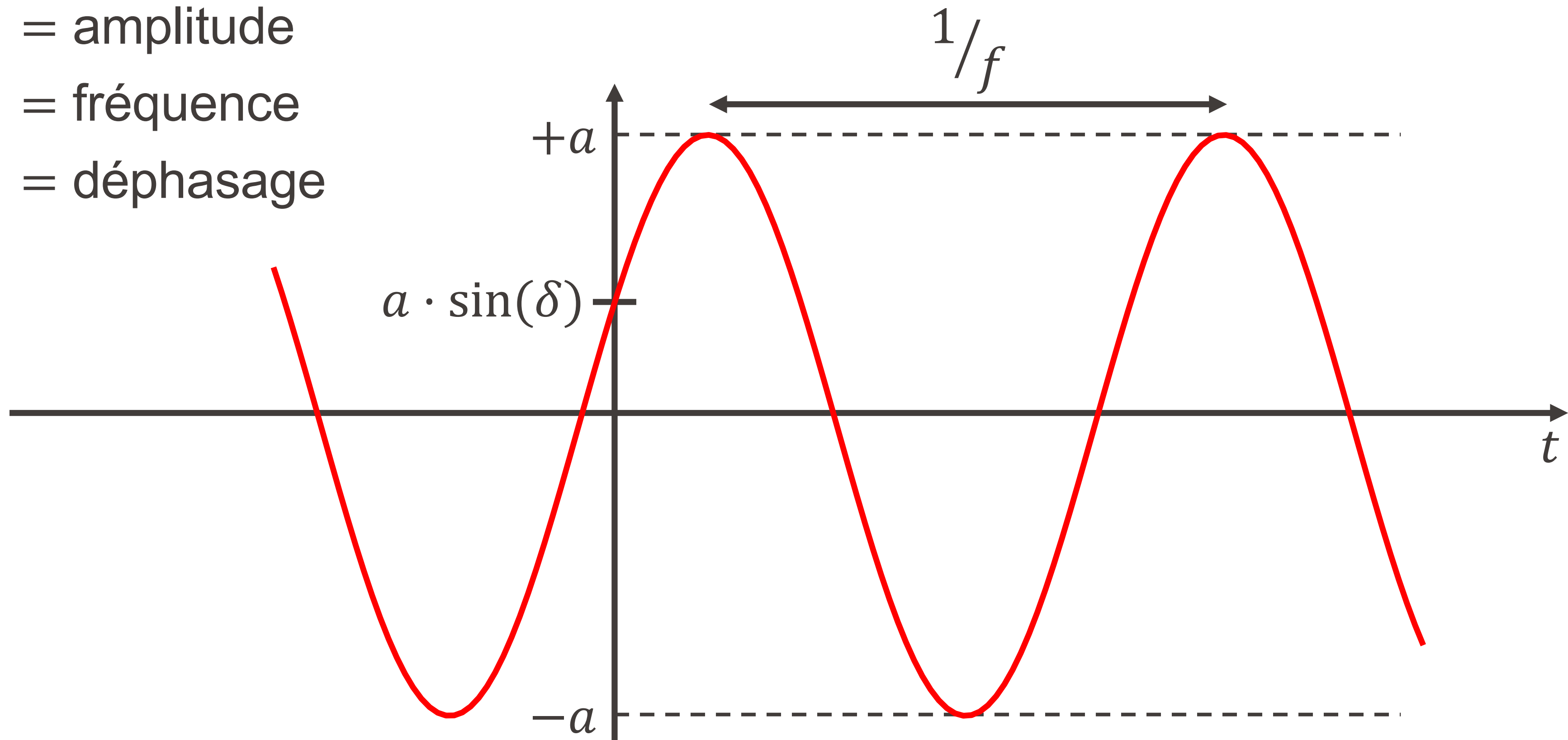


Nous considérerons exclusivement des **signaux unidimensionnels** ( $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ), par souci de clarté et de simplification.

# Sinusoïde pure

$$X(t) = a \cdot \sin(2\pi f t + \delta) \quad t \in \mathbb{R}$$

- $a$  = amplitude
- $f$  = fréquence
- $\delta$  = déphasage



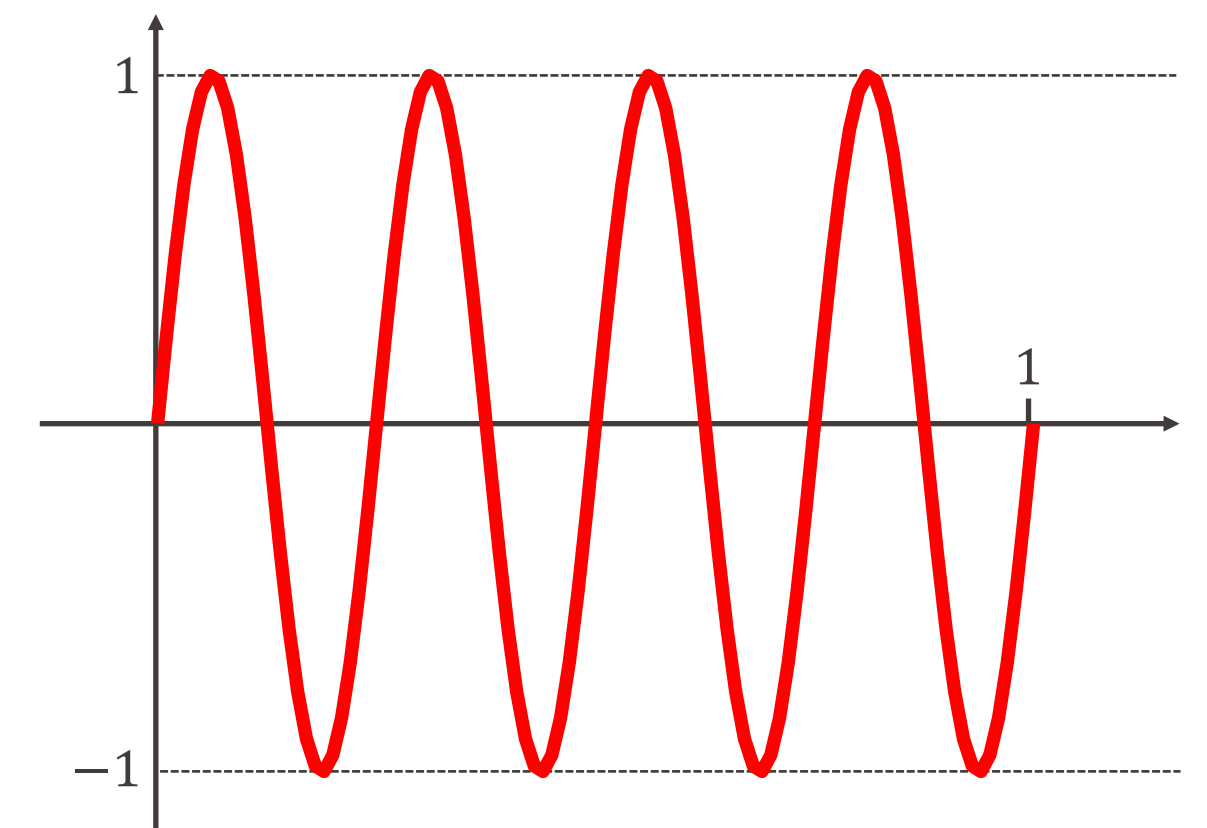
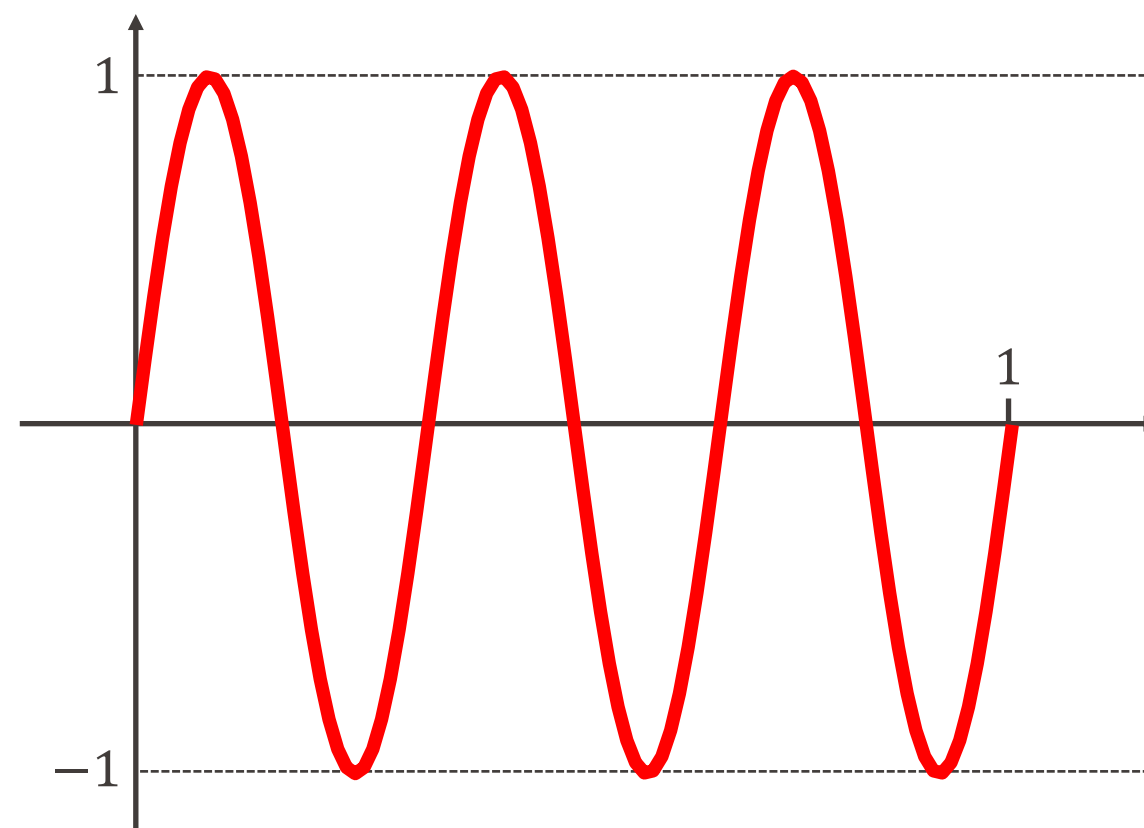
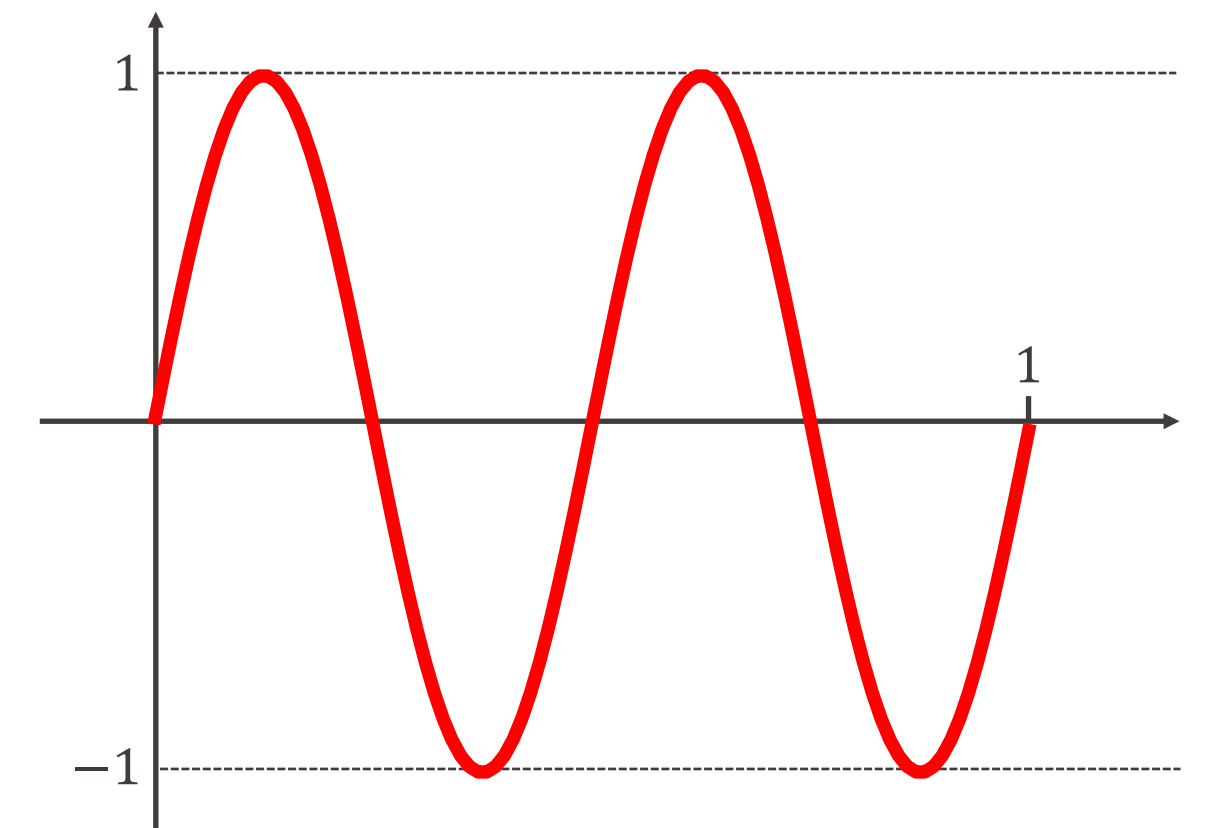
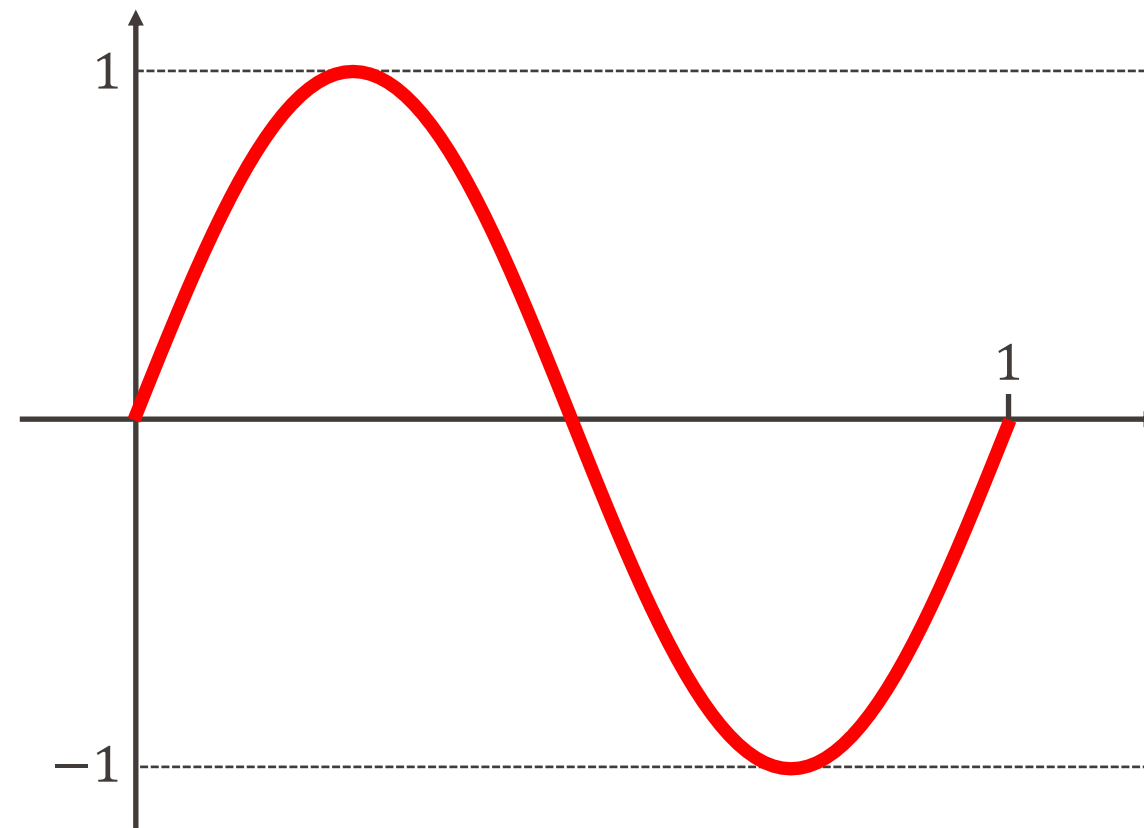
# Sinusoïde pure : fréquence

$$X(t) = a \cdot \sin(2\pi f t + \delta) \quad t \in \mathbb{R}$$

nombre de fois que la sinussoïde "se répète" pendant 1 sec.

- $a$  = amplitude = 1
- $f$  = fréquence
- $\delta$  = déphasage = 0

- $f = 1 : X(t) = \sin(2\pi t)$
- $f = 2 : X(t) = \sin(4\pi t)$
- $f = 3 : X(t) = \sin(6\pi t)$
- $f = 4 : X(t) = \sin(8\pi t)$

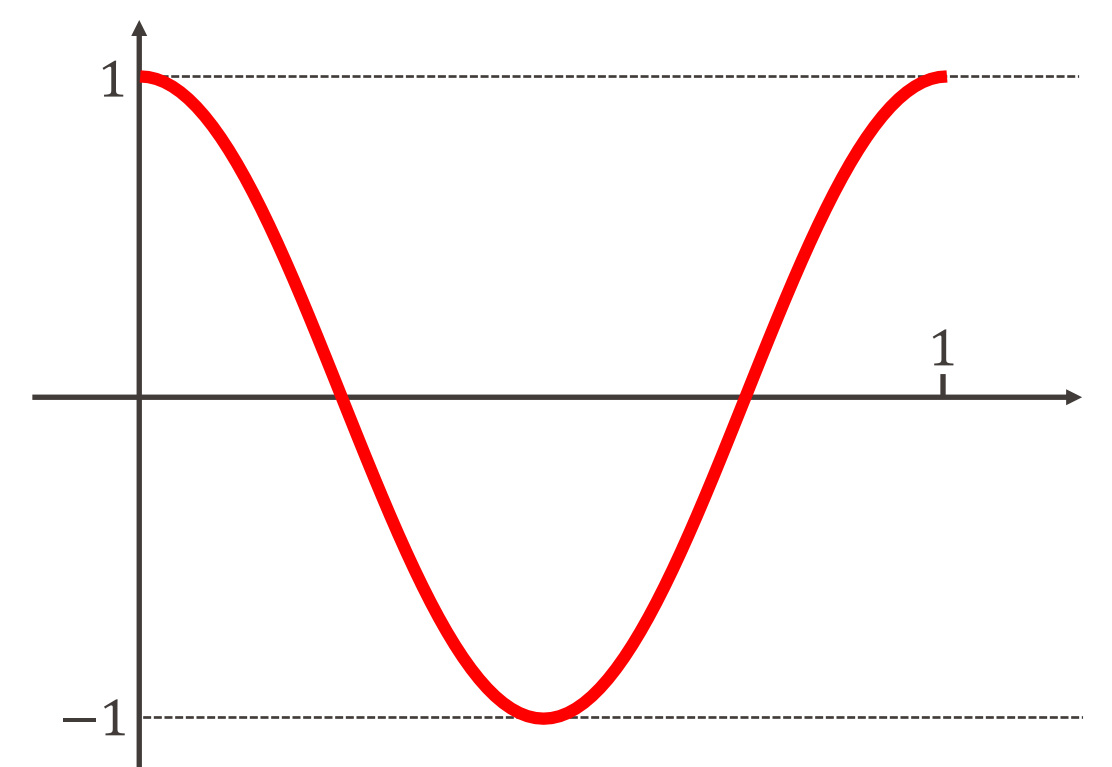
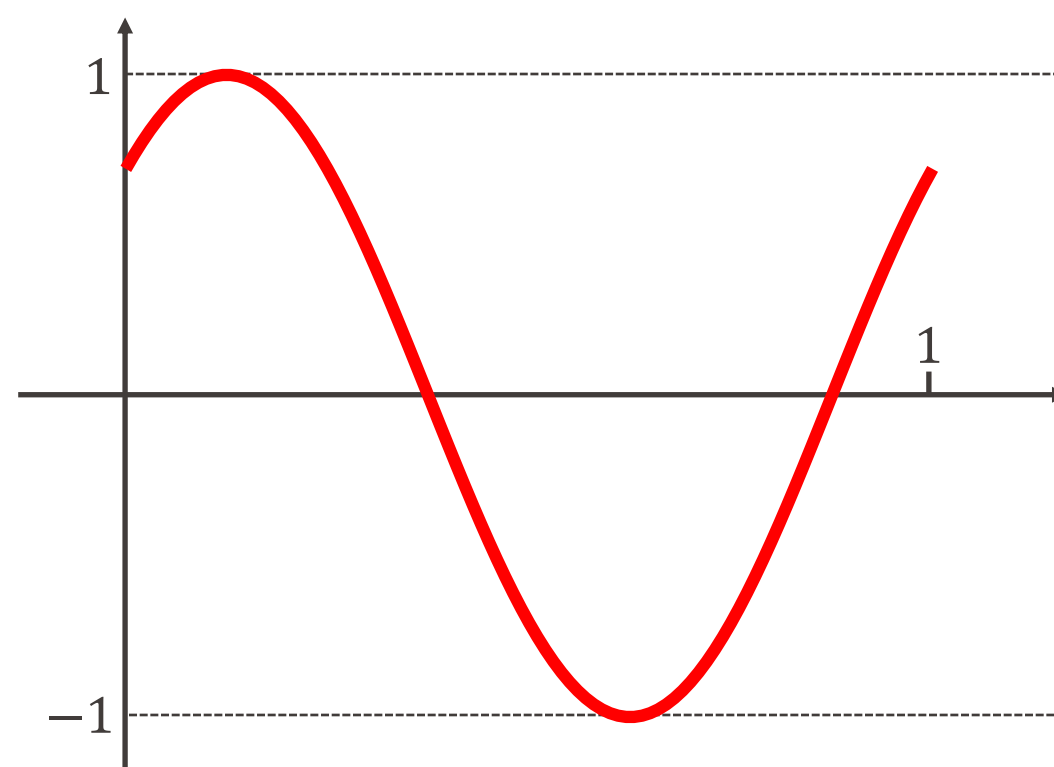
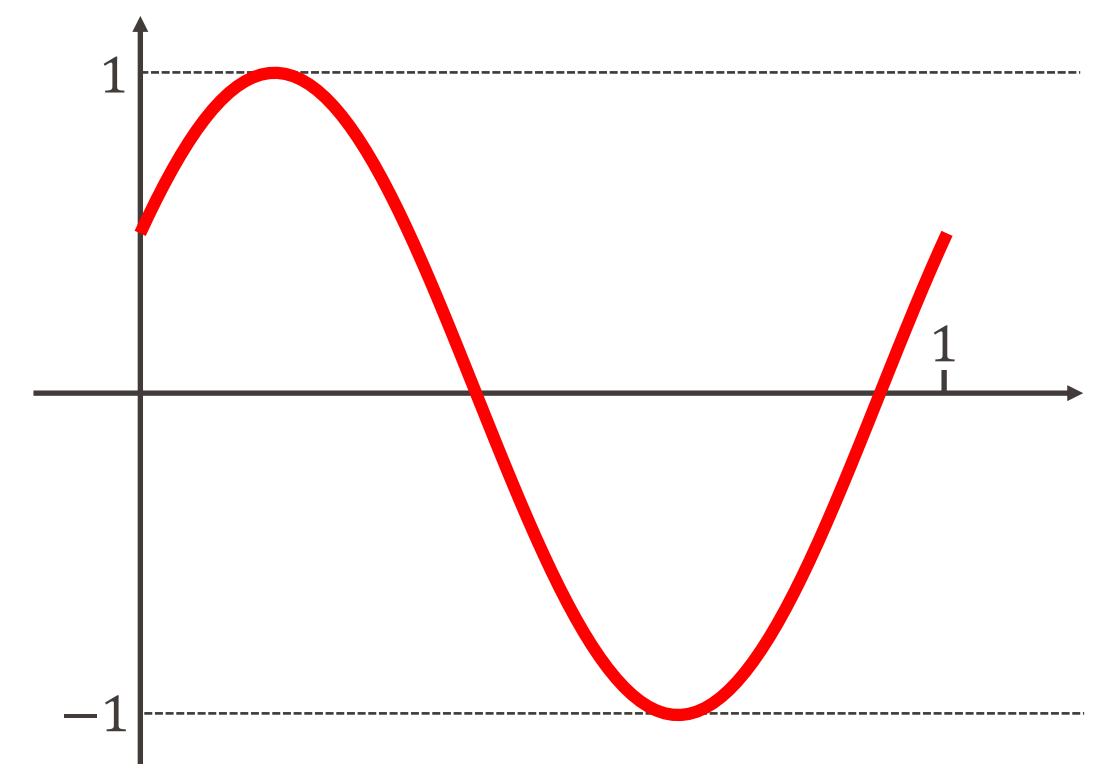
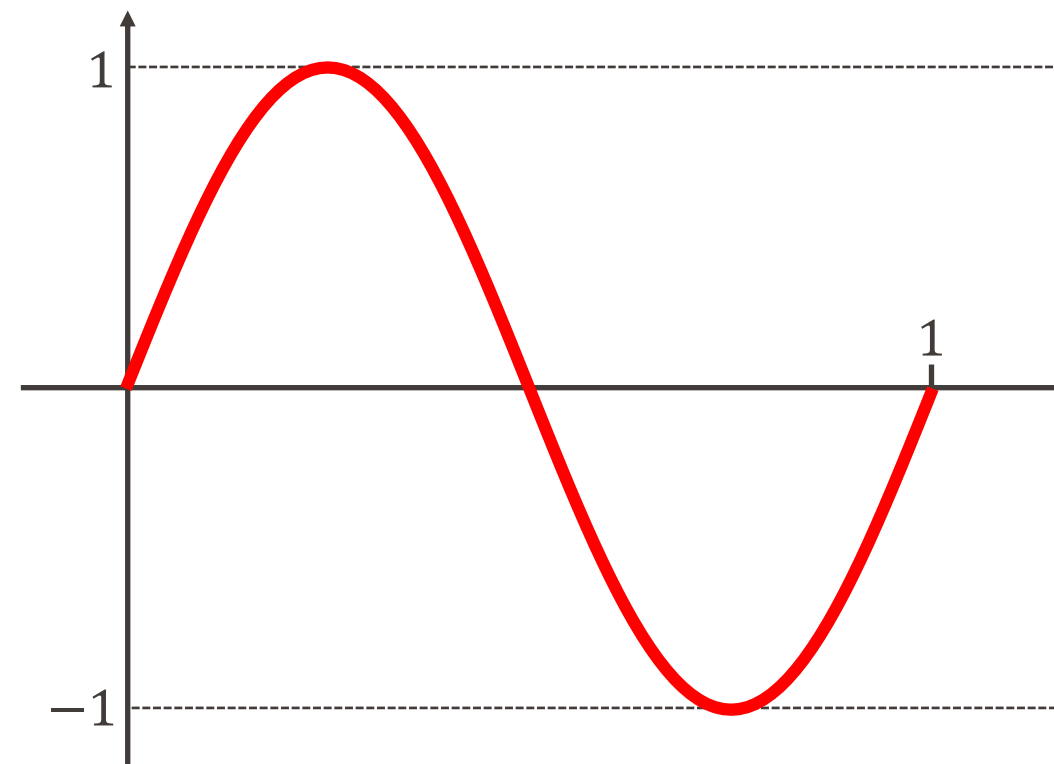


# Sinusoïde pure : déphasage

$$X(t) = a \cdot \sin(2\pi f t + \delta) \quad t \in \mathbb{R}$$

- $a$  = amplitude = 1
- $f$  = fréquence = 1
- $\delta$  = déphasage

- $\delta = 0$  :  $X(t) = \sin(2\pi t)$
- $\delta = \frac{\pi}{6}$  :  $X(t) = \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$
- $\delta = \frac{\pi}{4}$  :  $X(t) = \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$
- $\delta = \frac{\pi}{2}$  :  $X(t) = \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$   
 $= \cos(2\pi t)$



# EPFL Somme de sinusoides

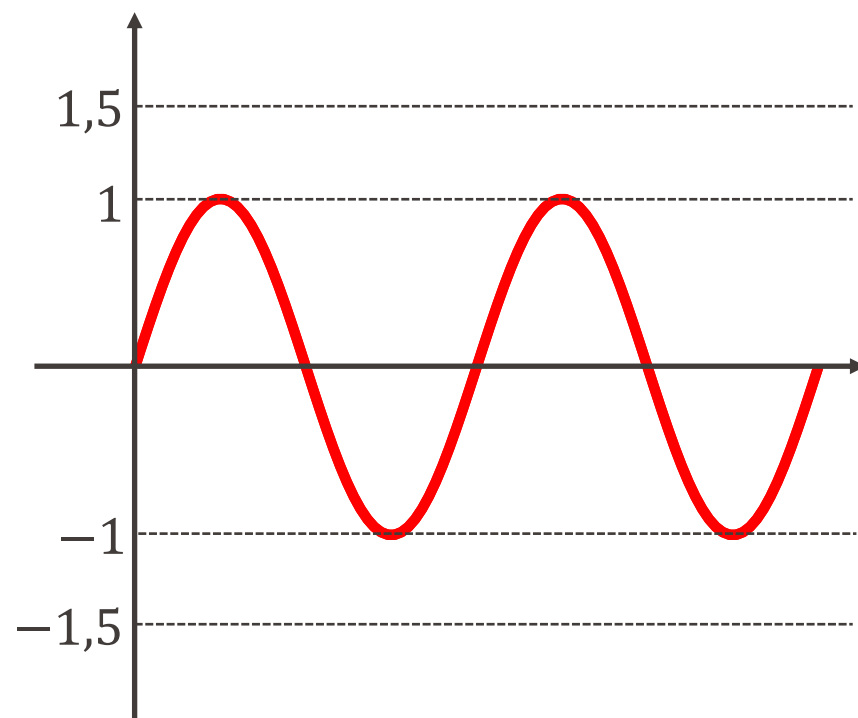
$$X(t) = a_1 \cdot \sin(2\pi f_1 t + \delta_1) + \cdots + a_n \cdot \sin(2\pi f_n t + \delta_n) \quad t \in \mathbb{R}$$

- $a_j$  = amplitudes
- $f_j$  = fréquences
- $\delta_j$  = déphasages

# Somme de sinusoides

**Exemple :**  $a_j = \frac{1}{j}$ ,  $f_j = 2j$ ,  $\delta_j = 0$ ,  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

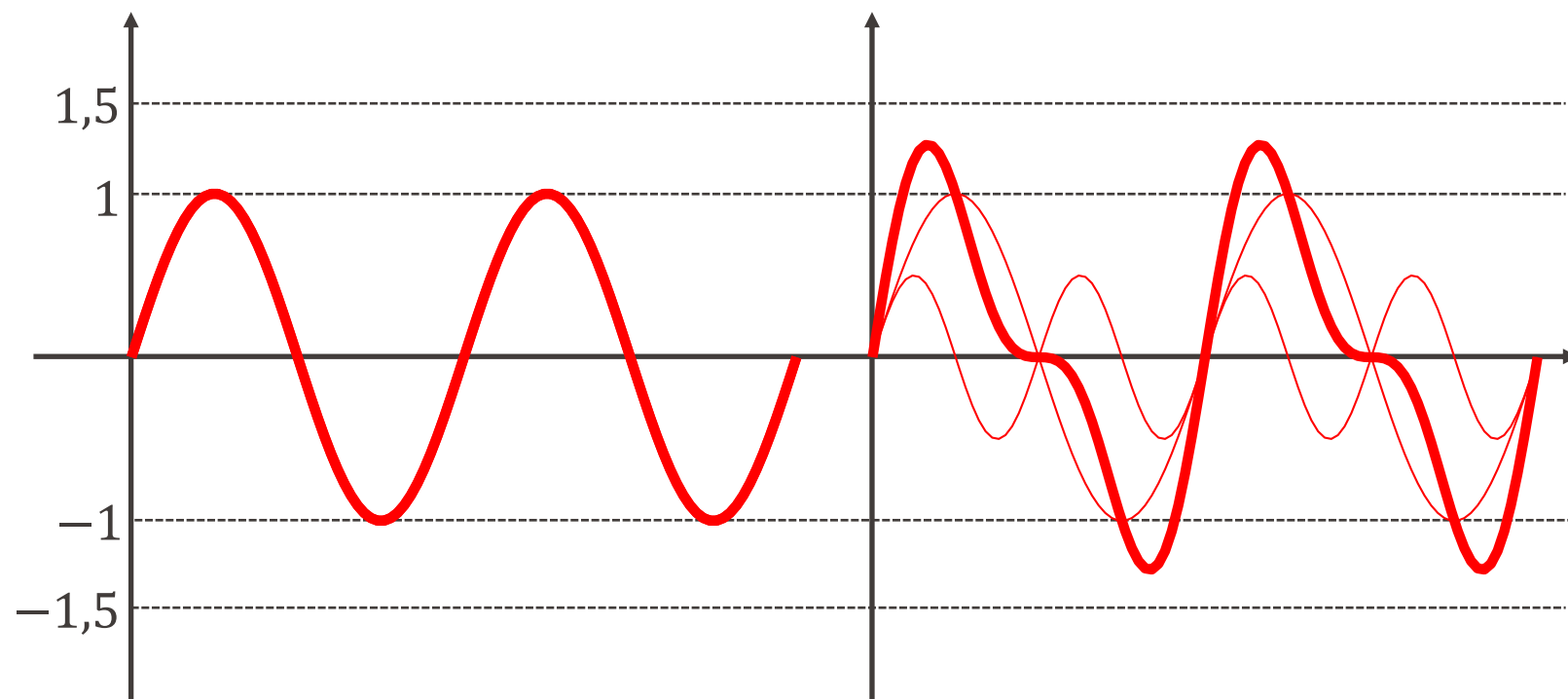
■  $n = 1$  :  $X(t) = \sin(4\pi t)$



# Somme de sinusoides

**Exemple :**  $a_j = \frac{1}{j}$ ,  $f_j = 2j$ ,  $\delta_j = 0$ ,  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

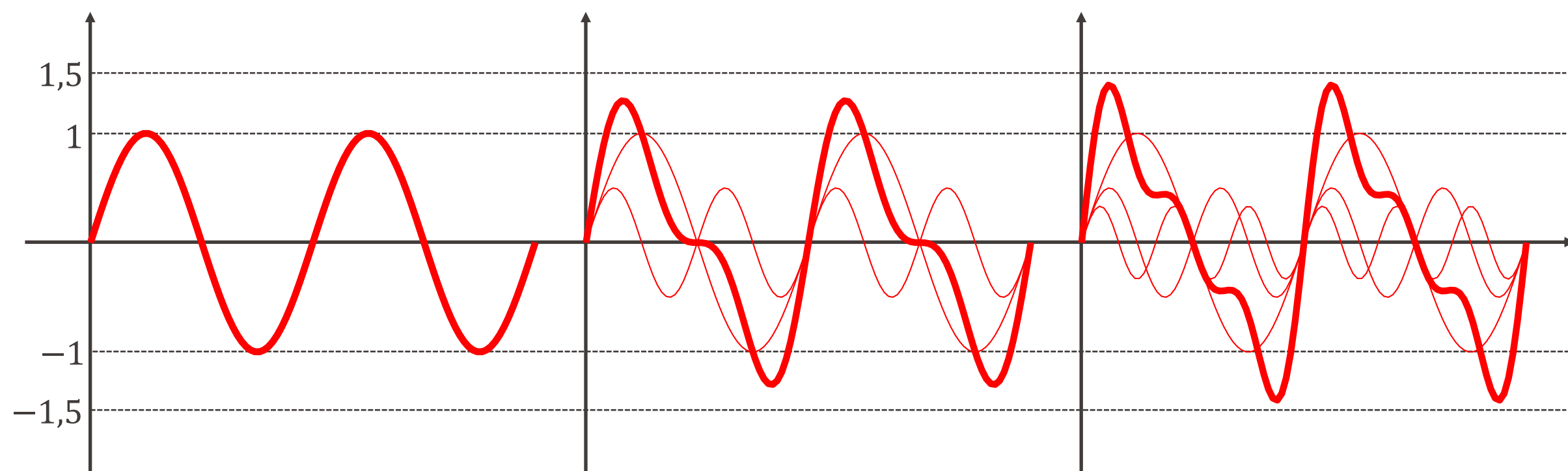
- $n = 1$  :  $X(t) = \sin(4\pi t)$
- $n = 2$  :  $X(t) = \sin(4\pi t) + \frac{1}{2} \sin(8\pi t)$



# Somme de sinusoides

**Exemple :**  $a_j = \frac{1}{j}$ ,  $f_j = 2j$ ,  $\delta_j = 0$ ,  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

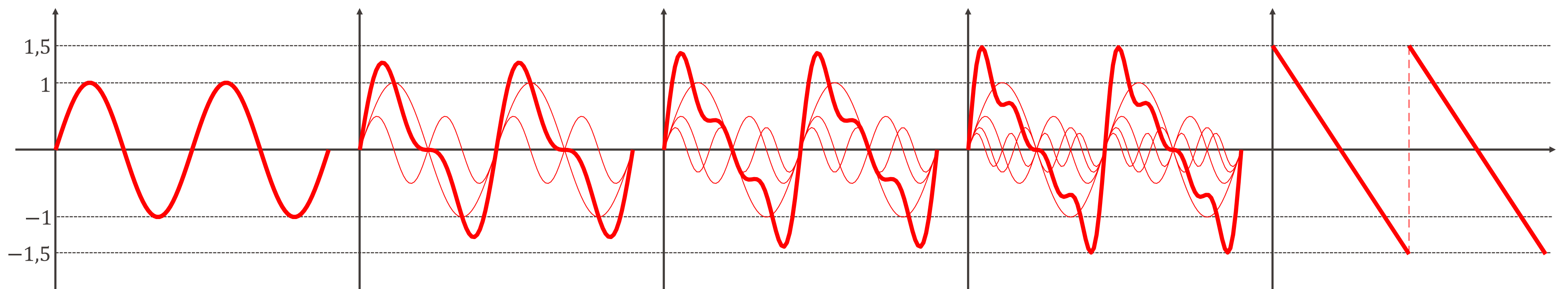
- $n = 1$  :  $X(t) = \sin(4\pi t)$
- $n = 2$  :  $X(t) = \sin(4\pi t) + \frac{1}{2} \sin(8\pi t)$
- $n = 3$  :  $X(t) = \sin(4\pi t) + \frac{1}{2} \sin(8\pi t) + \frac{1}{3} \sin(12\pi t)$



# Somme de sinusoides

**Exemple :**  $a_j = \frac{1}{j}$ ,  $f_j = 2j$ ,  $\delta_j = 0$ ,  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

- $n = 1 : X(t) = \sin(4\pi t)$
- $n = 2 : X(t) = \sin(4\pi t) + \frac{1}{2} \sin(8\pi t)$
- $n = 3 : X(t) = \sin(4\pi t) + \frac{1}{2} \sin(8\pi t) + \frac{1}{3} \sin(12\pi t)$
- $n = 4 : X(t) = \sin(4\pi t) + \frac{1}{2} \sin(8\pi t) + \frac{1}{3} \sin(12\pi t) + \frac{1}{4} \sin(16\pi t)$
- $n = \infty$



- **Affirmation** : (à prendre avec des pincettes...)

« **Tout signal est une somme de sinusoides !** »

- Par la suite, nous ne considérerons que des signaux qui sont des sommes **finies** de sinusoides.



**Joseph Fourier**

Mathématicien et physicien

1768 - 1830

# Fréquences : unité de mesure

- Un signal dont la fréquence est de  $f$  Hz se répète toutes les  $T = 1/f$  sec.
- La fréquence  $f$  contenue dans la sinusoïde  $X(t) = a \cdot \sin(2\pi ft + \delta)$  s'exprime en

$$\text{hertz} = \text{Hz} = \frac{1}{s}.$$

- Unité de mesure attribuée en l'honneur de H. R. Hertz, à qui on doit:
  - la vérification expérimentale que la lumière est une onde électromagnétique
  - le premier système de transmission et réception d'ondes radio.

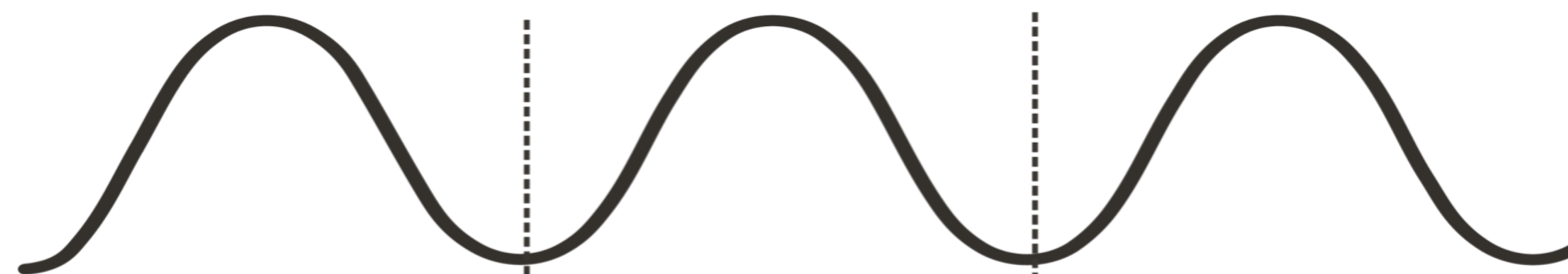


**Heinrich Rudolf Hertz**  
Ingénieur et physicien  
1857-1894

# Tous les « La à 440 Hz » ne sont pas les mêmes !

- **Exemple musical:** La note « La » à 440 *Hz* est un signal (onde sonore) qui se répète toutes les  $\frac{1}{440} = 2.2727 \dots$  millisecondes.

- diapason électronique



- violon

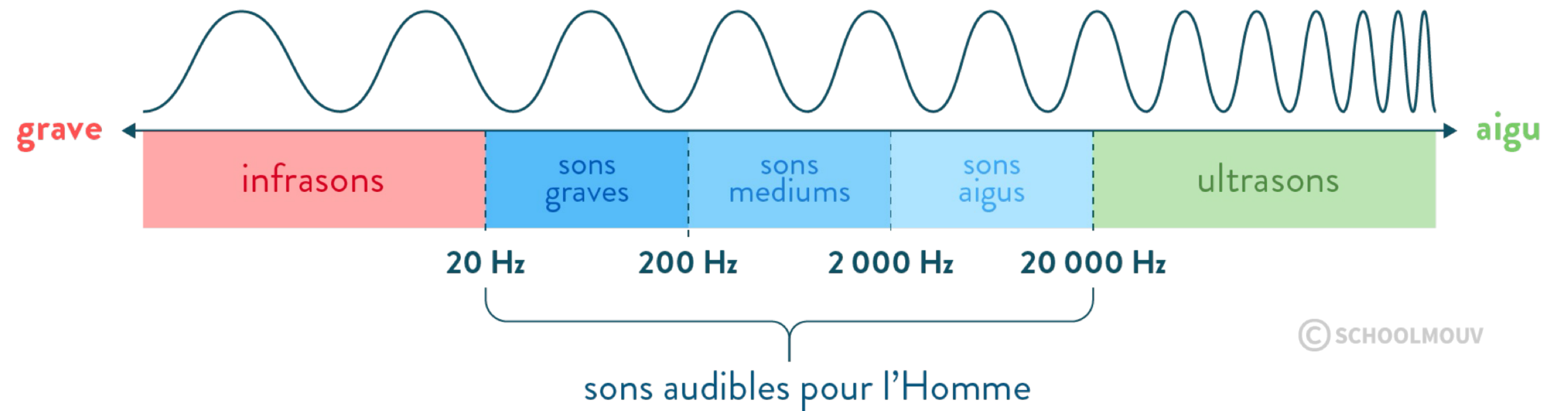


- clarinette

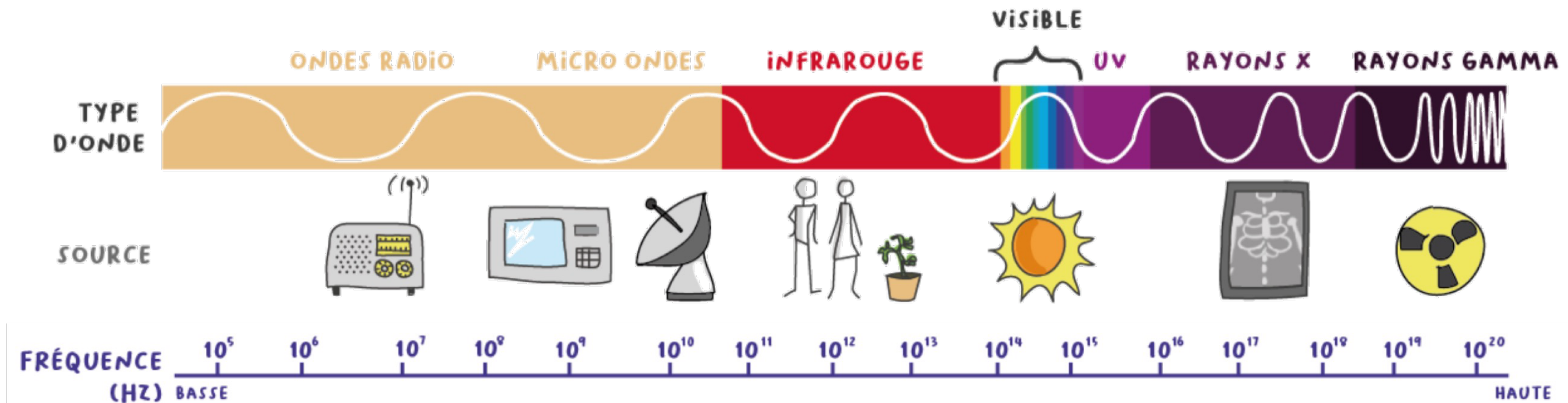


# Fréquences : quelques ordres de grandeur

## ■ Ondes sonores :



## ■ Ondes électromagnétiques :



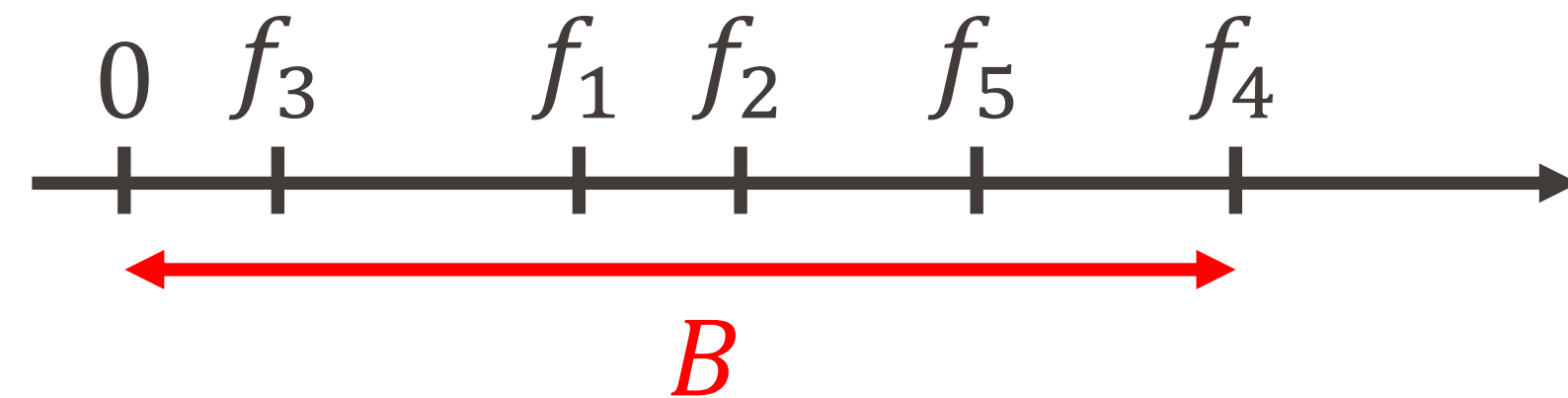
# Bande passante

- Revenons à notre somme de sinusoides :

$$X(t) = a_1 \cdot \sin(2\pi f_1 t + \delta_1) + \dots + a_n \cdot \sin(2\pi f_n t + \delta_n)$$

- On définit comme suit **la bande passante** de ce signal :

$$B = f_{max} = \max\{f_1, \dots, f_n\}$$



- **La bande passante joue un rôle primordial en traitement du signal.**

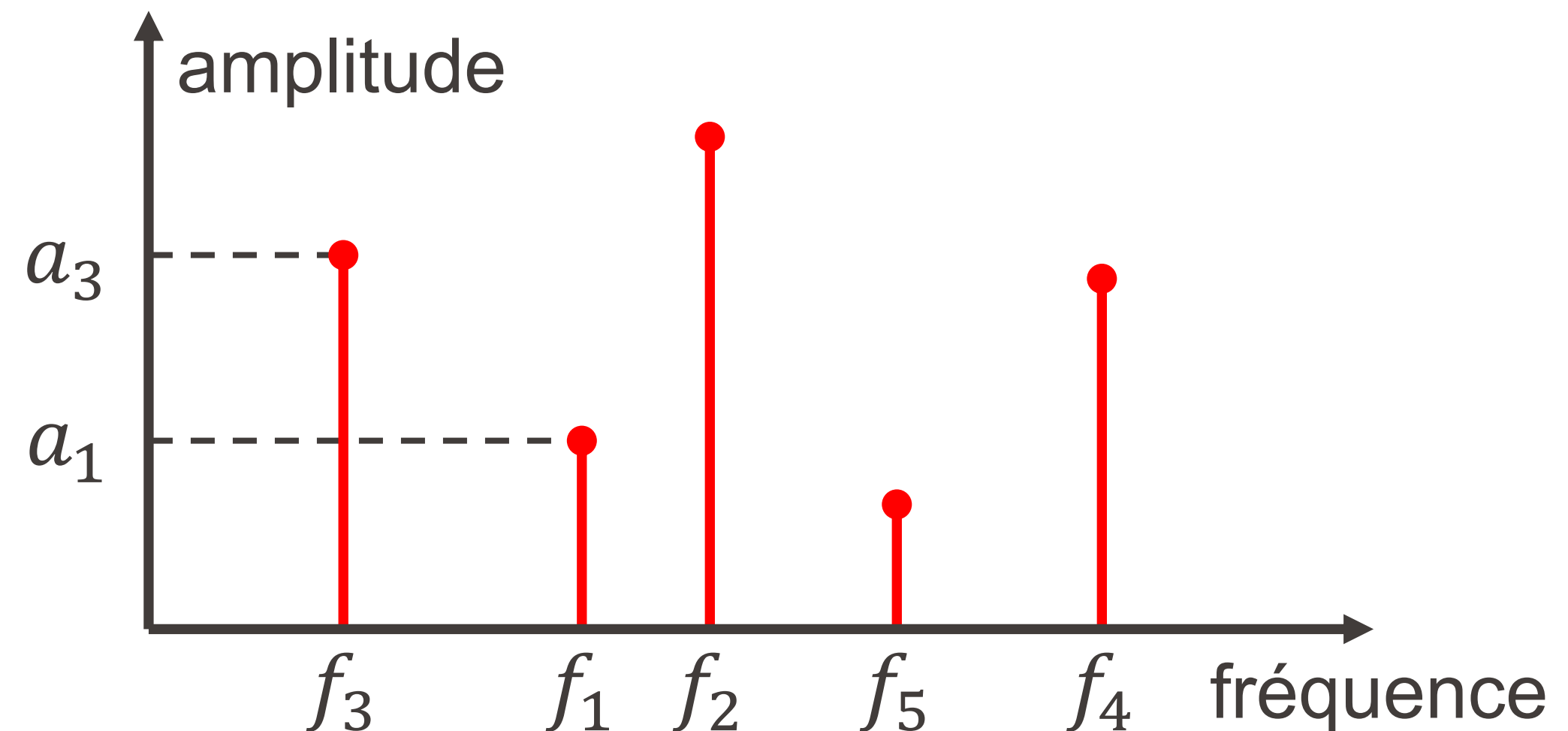
# Représentation spectrale du signal (Fourier)

- Toujours avec notre somme de sinusoides :

$$X(t) = a_1 \cdot \sin(2\pi f_1 t + \delta_1) + \dots + a_n \cdot \sin(2\pi f_n t + \delta_n)$$

- axe horizontal = fréquences présentes
- axe vertical = amplitudes correspondantes

- **Le spectre du signal :**





# Information, Calcul et Communication

Filtrage de signaux

Olivier Lévêque

# Filtrage d'un signal

- De manière générale, lorsqu'un signal ( $X(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ) passe par un **filtre**, il en ressort une version déformée ( $\hat{X}(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ) :



==== Pourquoi donc vouloir filtrer un signal ? =====

Par exemple, pour atténuer le bruit !

- Dans ce cours, nous allons voir deux exemples de filtres **passé-bas** :
  - Le filtre **passé-bas idéal**
  - Le filtre à **moyenne mobile**

# Filtre passe-bas idéal

Un filtre passe-bas idéal est un filtre qui **supprime** les composantes de fréquences supérieures à une fréquence de coupure  $f_c$ .

## Exemple :

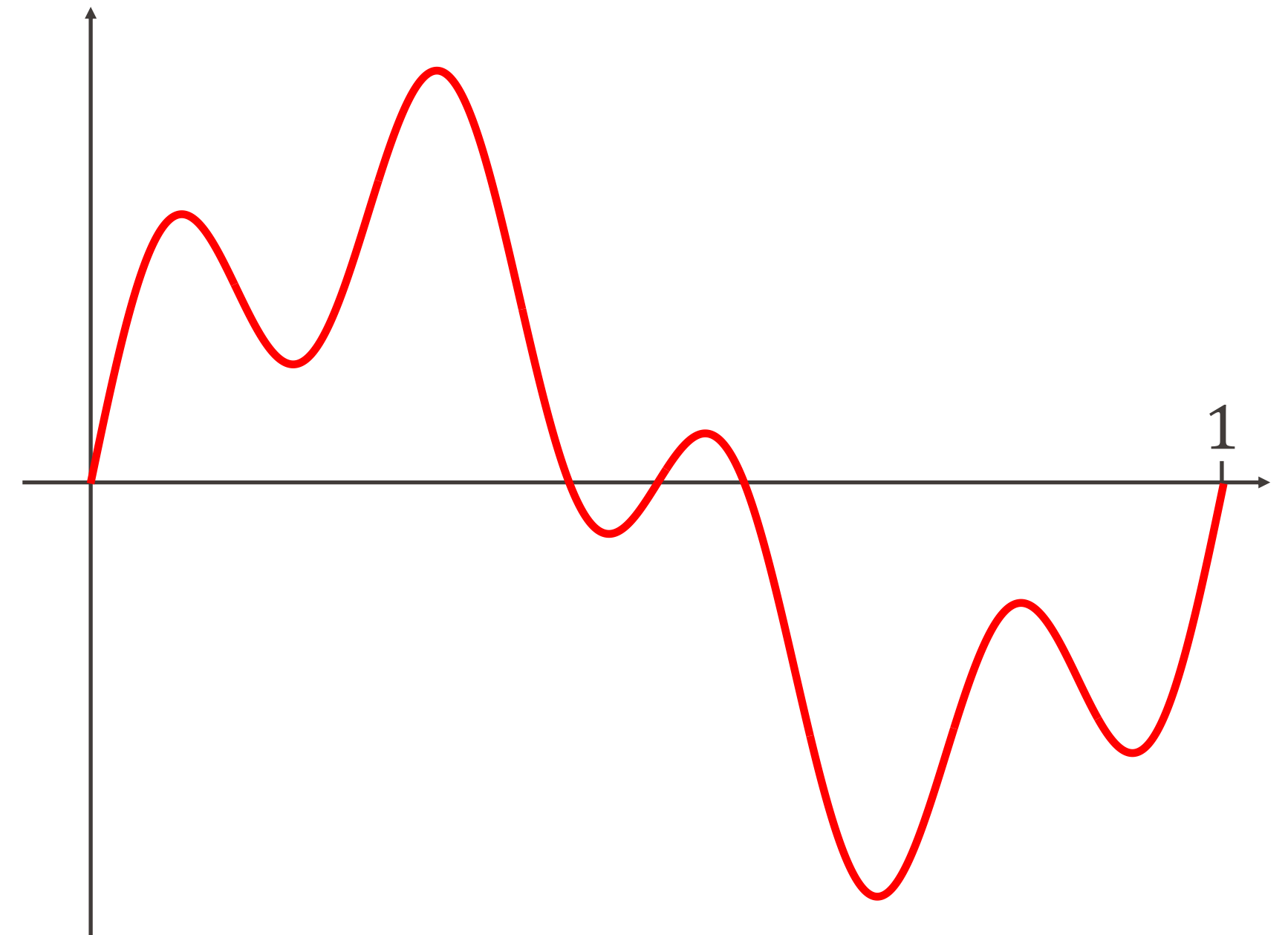
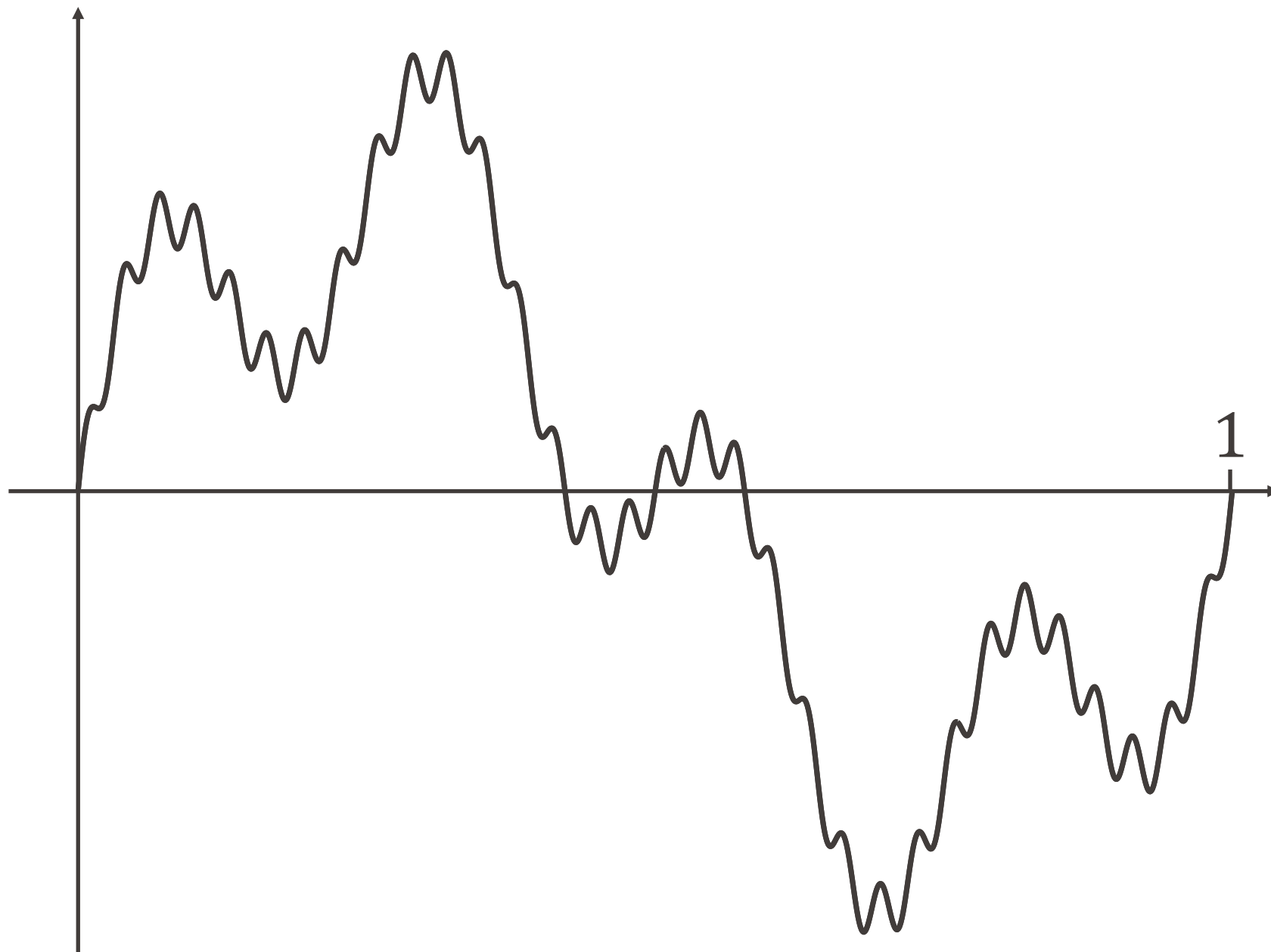
- Considérons le signal (contenant les fréquences  $f = 1, 4$  et  $32 \text{ Hz}$ ) :

$$X(t) = \sin(2\pi t) + \frac{1}{2} \sin(8\pi t) + \frac{1}{10} \sin(64\pi t)$$

- Après passage au travers d'un **filtre passe-bas avec fréquence de coupure**  $f_c = 30 \text{ Hz}$ , la composante à  $32 \text{ Hz}$  disparaît, et le signal devient :

$$\hat{X}(t) = \sin(2\pi t) + \frac{1}{2} \sin(8\pi t)$$

Exemple :



$$X(t) = \sin(2\pi t) + \frac{1}{2} \sin(8\pi t) + \frac{1}{10} \sin(64\pi t) \rightarrow \hat{X}(t) = \sin(2\pi t) + \frac{1}{2} \sin(8\pi t)$$

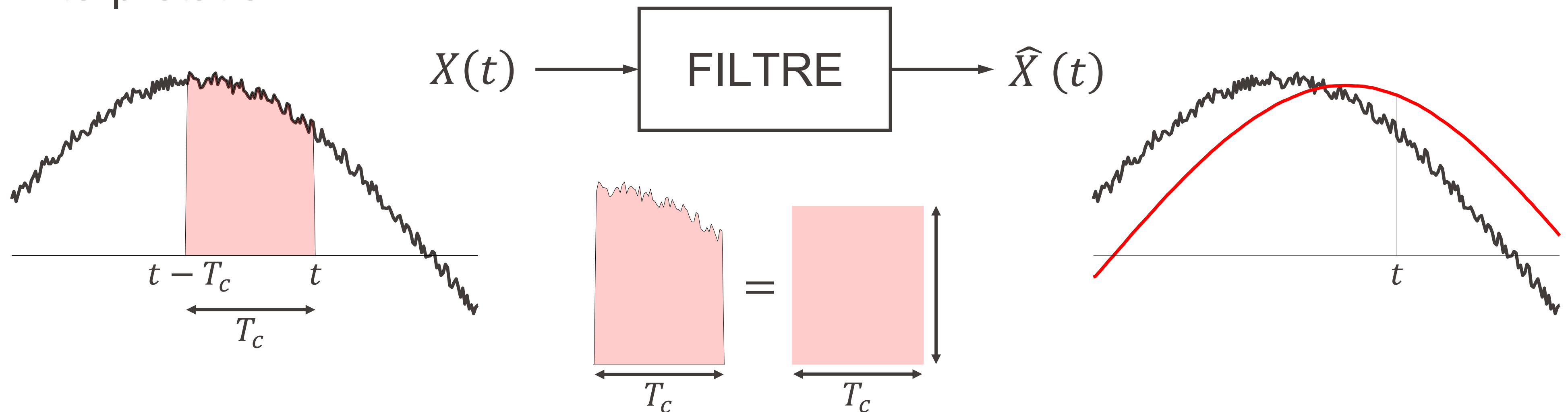
# Filtre à moyenne mobile

Le signal  $\hat{X}(t)$  sortant à l'instant  $t$  d'un filtre à moyenne mobile est donné par :

$$\hat{X}(t) = \frac{1}{T_c} \cdot \int_{t-T_c}^t X(s) \cdot ds$$

où  $T_c$  est la période sur laquelle on moyenne le signal.

- Interprétation :



# Filtre à moyenne mobile

**Exemple :** Que devient le signal  $X(t) = \sin(2\pi ft)$  passant par un tel filtre?

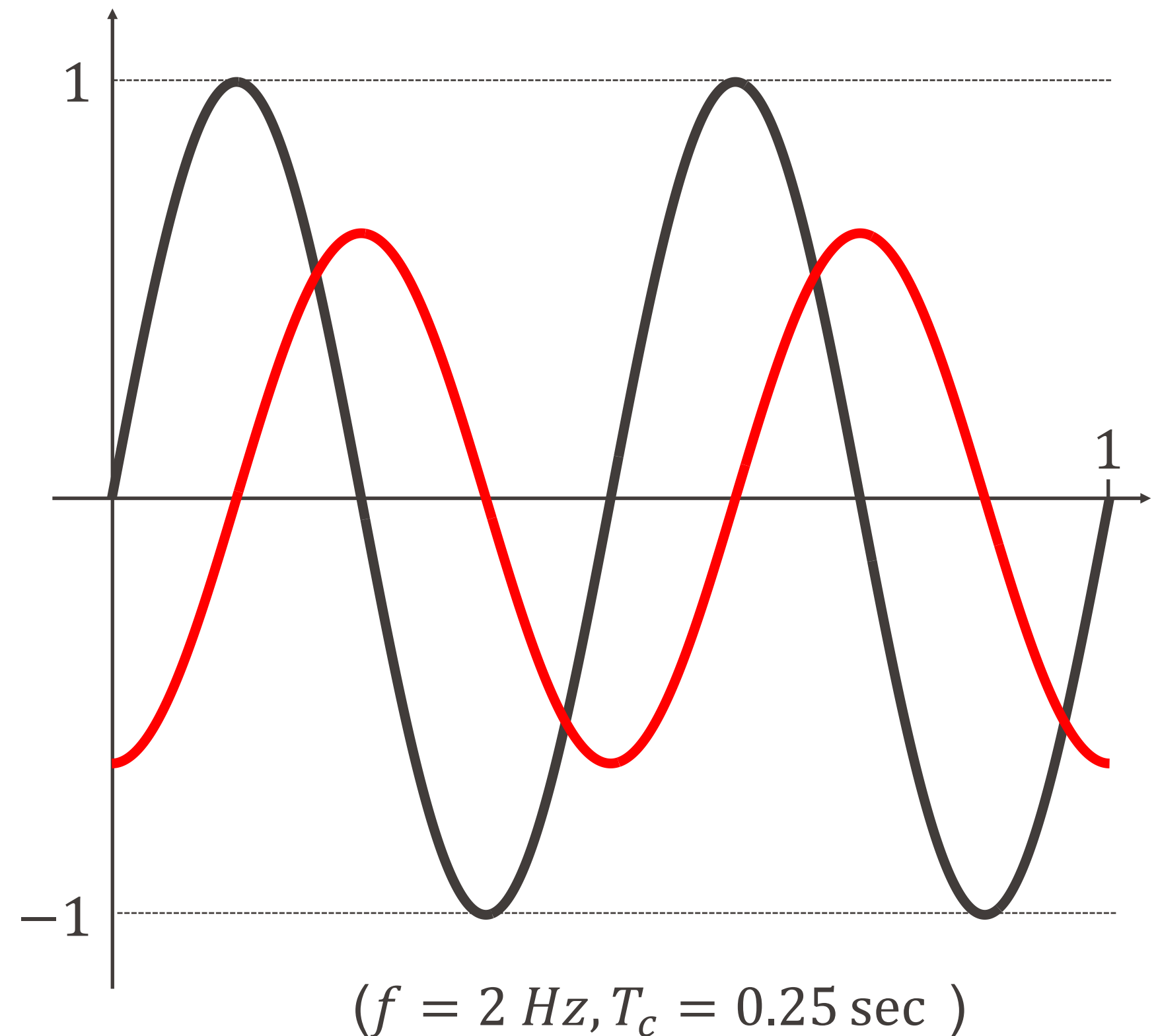
$$\begin{aligned}
 \hat{X}(t) &= \frac{1}{T_c} \cdot \int_{t-T_c}^t X(s) \cdot ds \\
 &= \frac{1}{T_c} \cdot \int_{t-T_c}^t \sin(2\pi fs) \cdot ds \\
 &= \frac{\cos(2\pi f(t - T_c)) - \cos(2\pi ft)}{2\pi f \cdot T_c} \\
 &= \frac{\sin(\pi f T_c)}{\pi f T_c} \cdot \sin(2\pi ft - \pi f T_c)
 \end{aligned}$$

plus petite amplitude de  $\frac{\sin(\pi f T_c)}{\pi f T_c}$    
 même fréquence  $\downarrow$    
 introduction d'un déphasage  $\underbrace{\sin(2\pi ft - \pi f T_c)}$

# Filtre à moyenne mobile

**Exemple :** Que devient le signal  $X(t) = \sin(2\pi ft)$  passant par un tel filtre?

$$\begin{aligned}
 \hat{X}(t) &= \frac{1}{T_c} \cdot \int_{t-T_c}^t X(s) \cdot ds \\
 &= \frac{1}{T_c} \cdot \int_{t-T_c}^t \sin(2\pi fs) \cdot ds \\
 &= \frac{\cos(2\pi f(t - T_c)) - \cos(2\pi ft)}{2\pi f \cdot T_c} \\
 &= \frac{\sin(\pi f T_c)}{\pi f T_c} \cdot \sin(2\pi ft - \pi f T_c)
 \end{aligned}$$

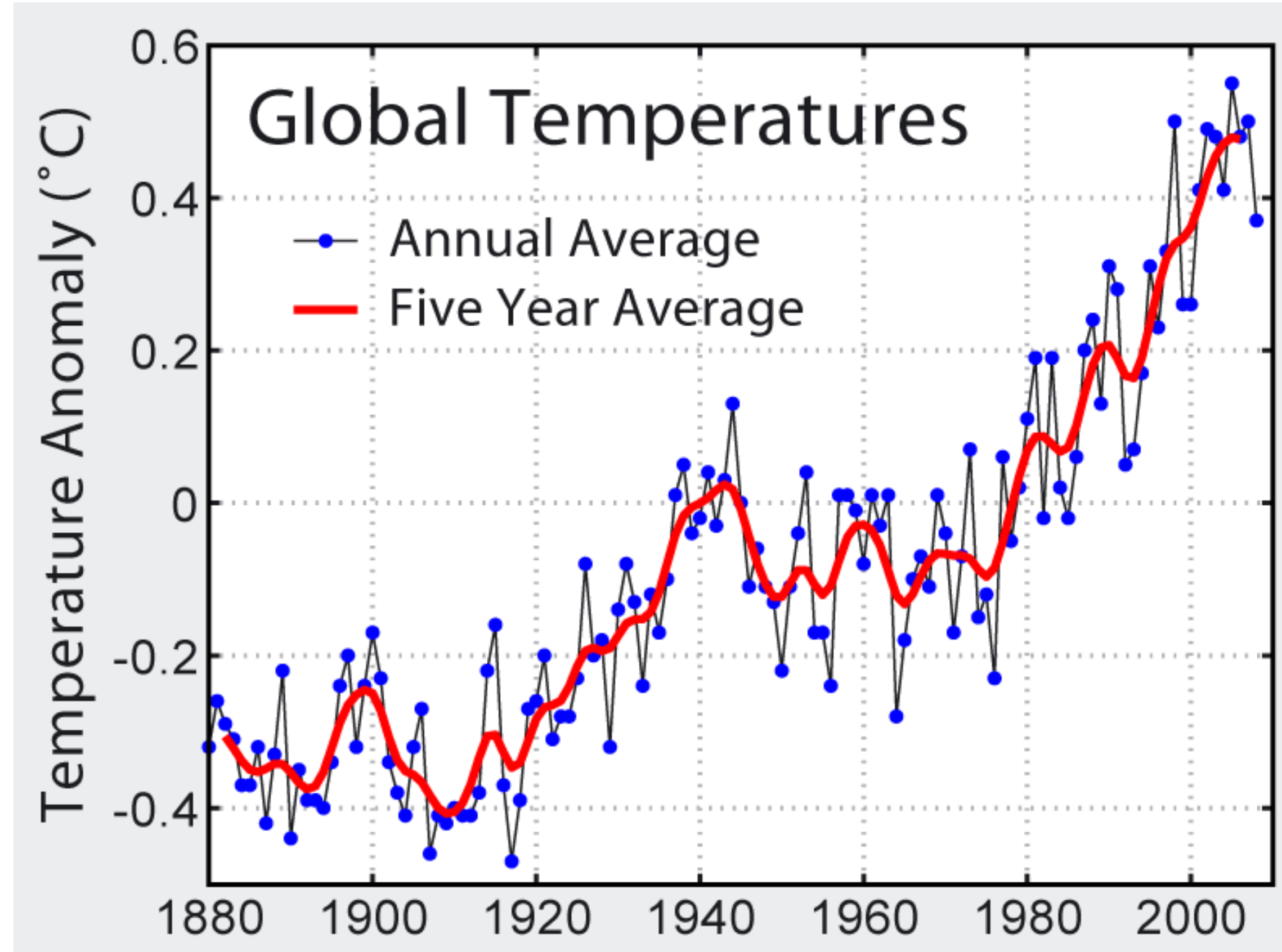


# Filtre à moyenne mobile discret

bleu :  $(X(n), n \in \mathbb{Z})$

$$\hat{X}(n) = \frac{1}{5} \sum_{i=-2}^{+2} X(n+i)$$

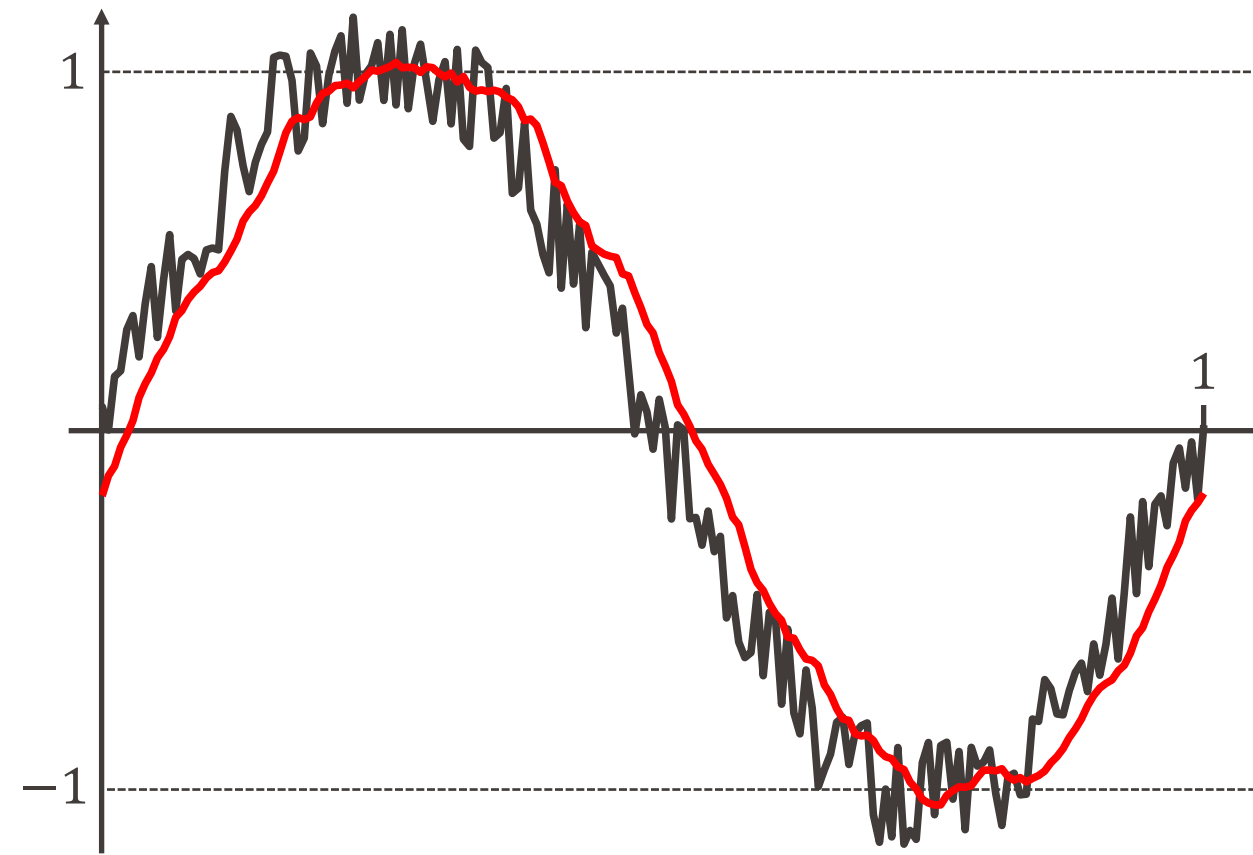
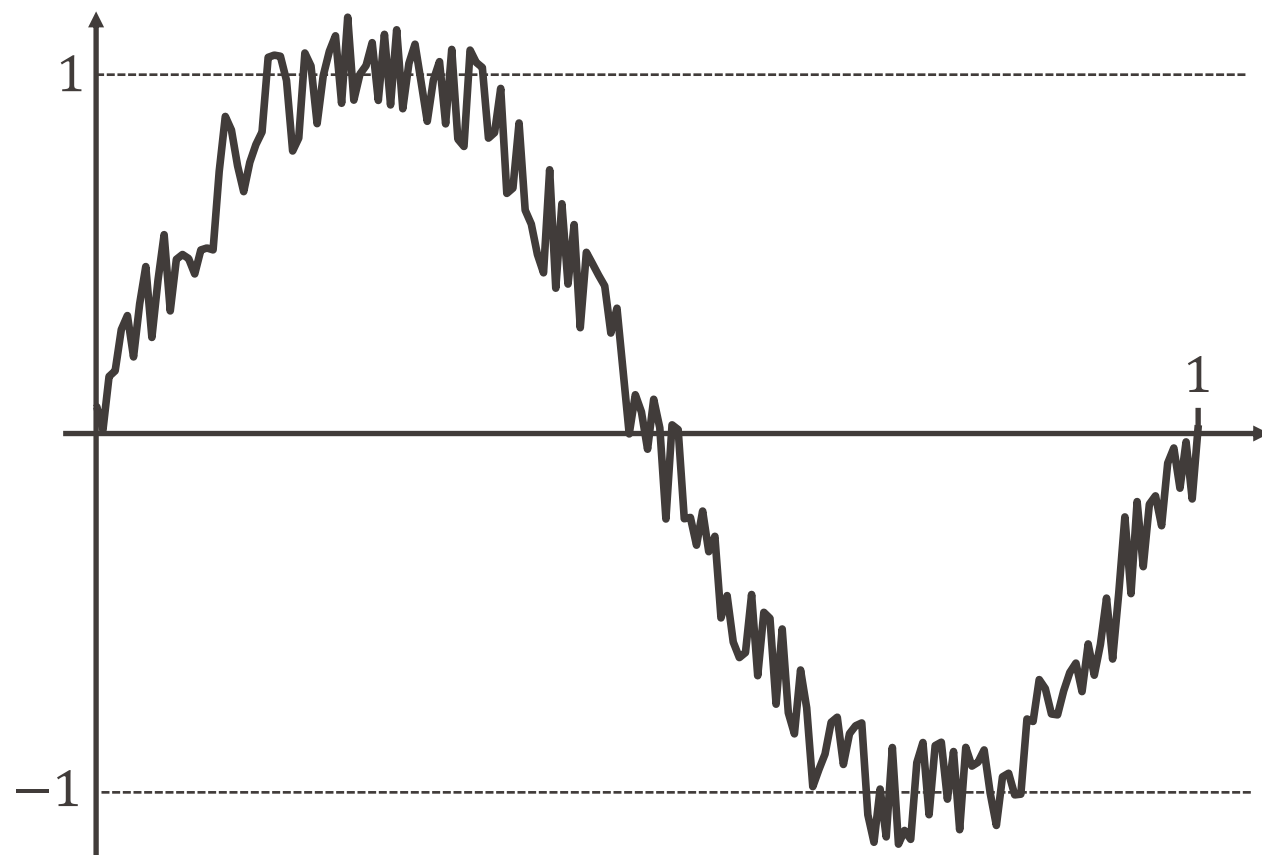
range



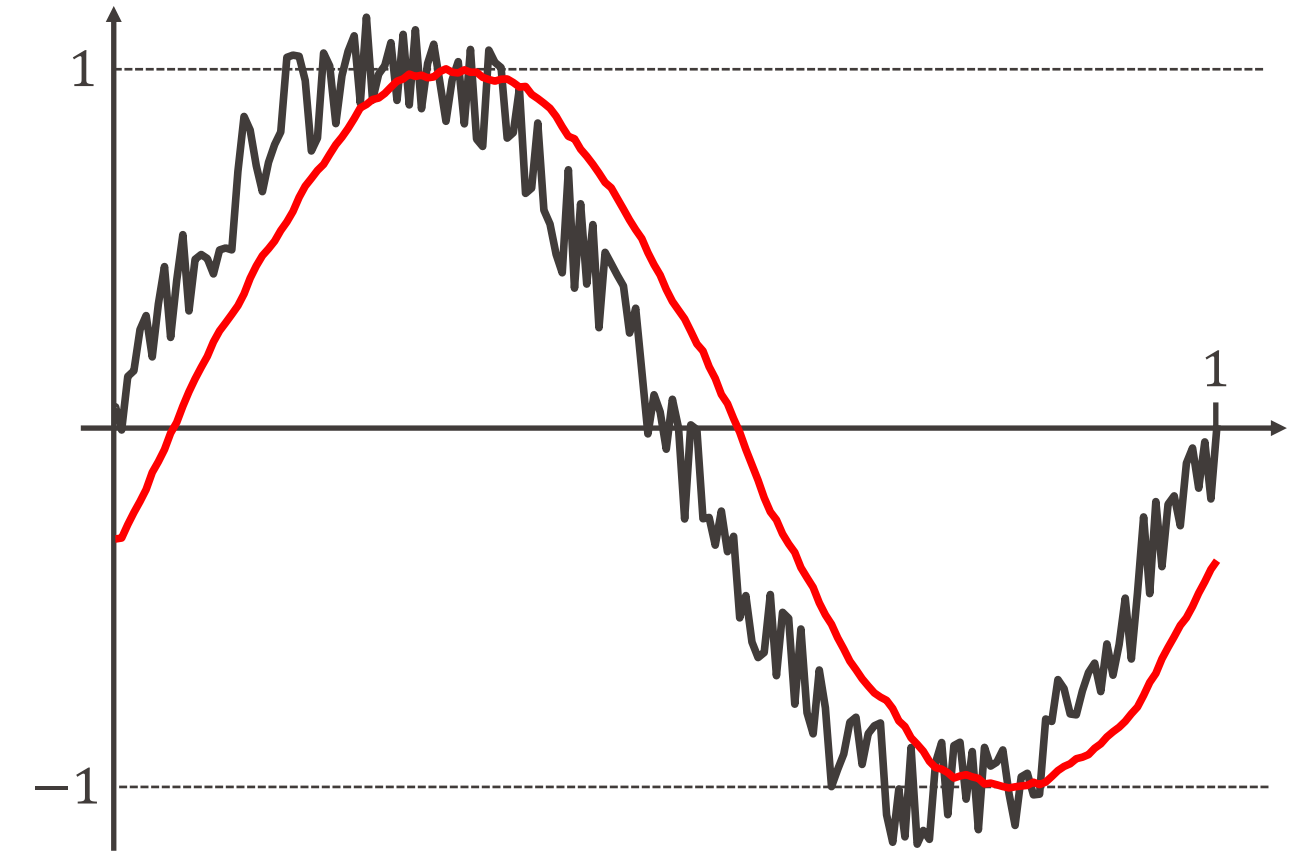
Source: Global Warming Art

# Effet de la période $T_c$

$$X(t) \rightarrow \hat{X}(t) :$$



$T_c = 0.05 \text{ sec}$



$T_c = 0.1 \text{ sec}$

Plus  $T_c$  augmente :

- plus le signal sortant est **lisse**,
- mais plus le **décalage** est grand également.

# Effet de la période $T_c$

- Revenons à la sinusoïde pure  $X(t) = \sin(2\pi ft)$  :

$$\hat{X}(t) = \frac{\sin(\pi f T_c)}{\pi f T_c} \cdot \sin(2\pi ft - \pi f T_c)$$

$$|a| \leq \frac{1}{\pi f T_c}$$

↘ 0

(si  $T_c \rightarrow \infty$ )  
(si  $f \rightarrow \infty$ )

si  $f T_c$  devient grand

# Effet de la période $T_c$

- Revenons à la sinusoïde pure  $X(t) = \sin(2\pi f t)$  :

$$\hat{X}(t) = \frac{\sin(\pi f T_c)}{\pi f T_c} \cdot \sin(2\pi f t - \pi f T_c)$$

- De cette expression, on déduit que :

$$\max_{t \in \mathbb{R}} |\hat{X}(t)| = \left| \frac{\sin(\pi f T_c)}{\pi f T_c} \right| \leq \frac{1}{\pi f T_c}$$

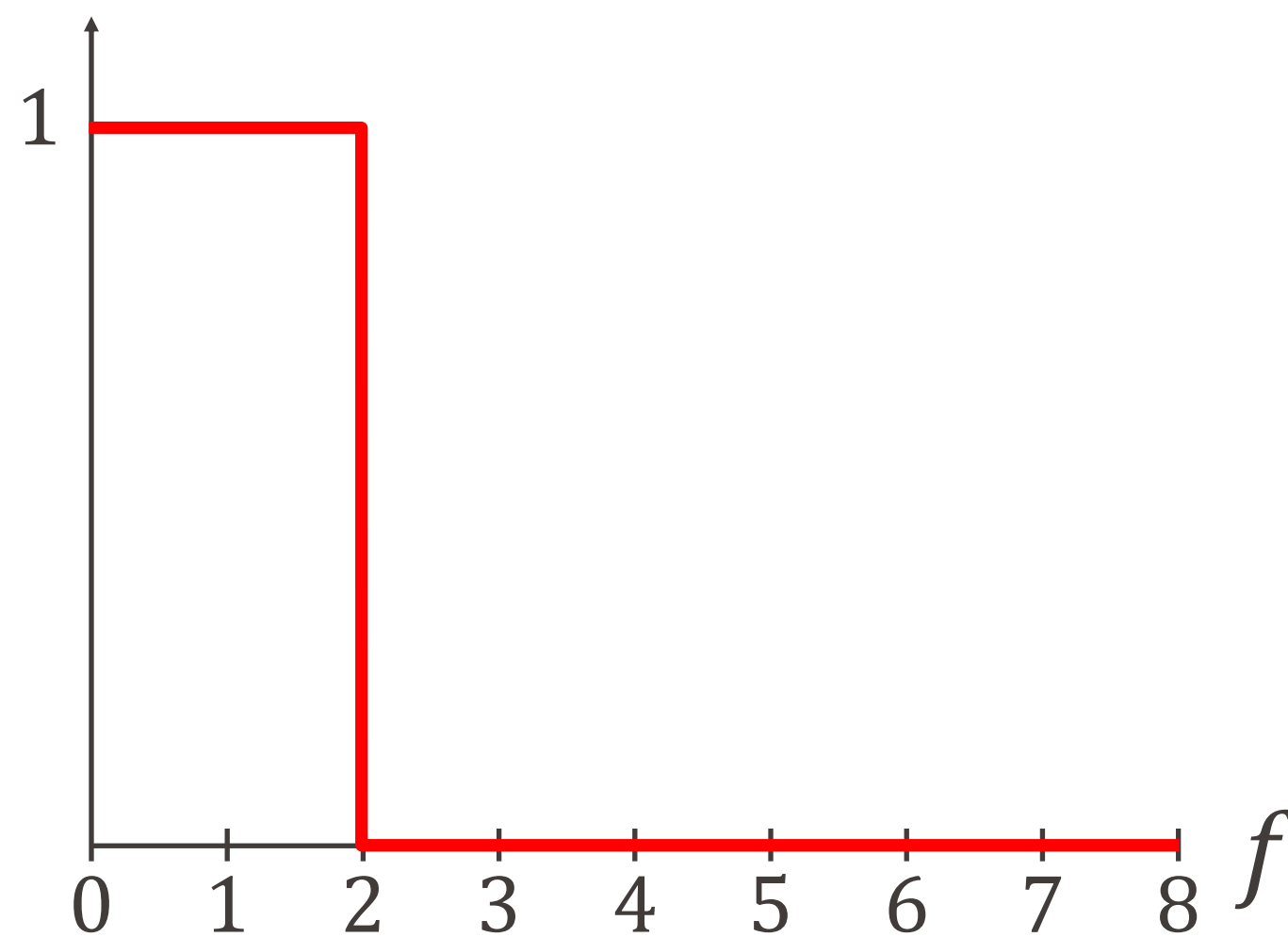
- On voit que si  $f T_c$  est grand, alors le signal  $\hat{X}(t)$  est de faible amplitude.

Après le passage à travers un filtre à moyenne mobile, les **hautes fréquences** d'un signal sont donc **fortement atténuées**.

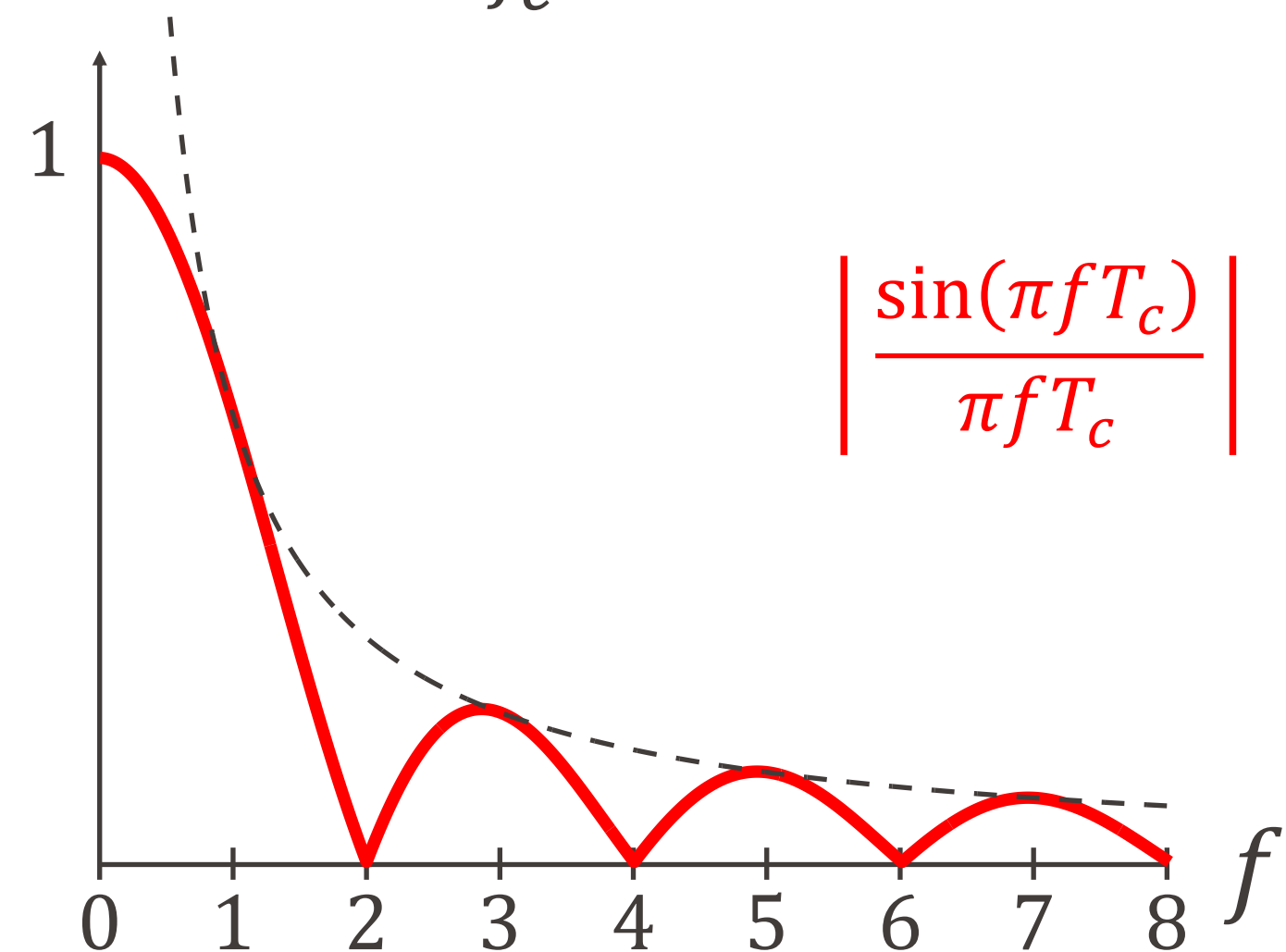
# Comparaison de ces deux filtres passe-bas

Atténuation des fréquences dans la **représentation spectrale** :

- un **filtre passe-bas idéal** avec fréquence de coupure  $f_c = 2 \text{ Hz}$



- un **filtre à moyenne mobile** de période  $T_c = \frac{1}{f_c} = 0.5 \text{ sec}$ .



Sur ce dernier graphe apparaît en traitillé la borne supérieure  $\frac{1}{\pi f T_c}$  qu'on vient de calculer

# Filtrage : conclusion

- Un filtre passe-bas sert donc à supprimer ou atténuer les hautes fréquences dans un signal.
- Par la suite, nous verrons une autre application importante des filtres passe-bas.



# Information, Calcul et Communication

Échantillonnage  
de signaux

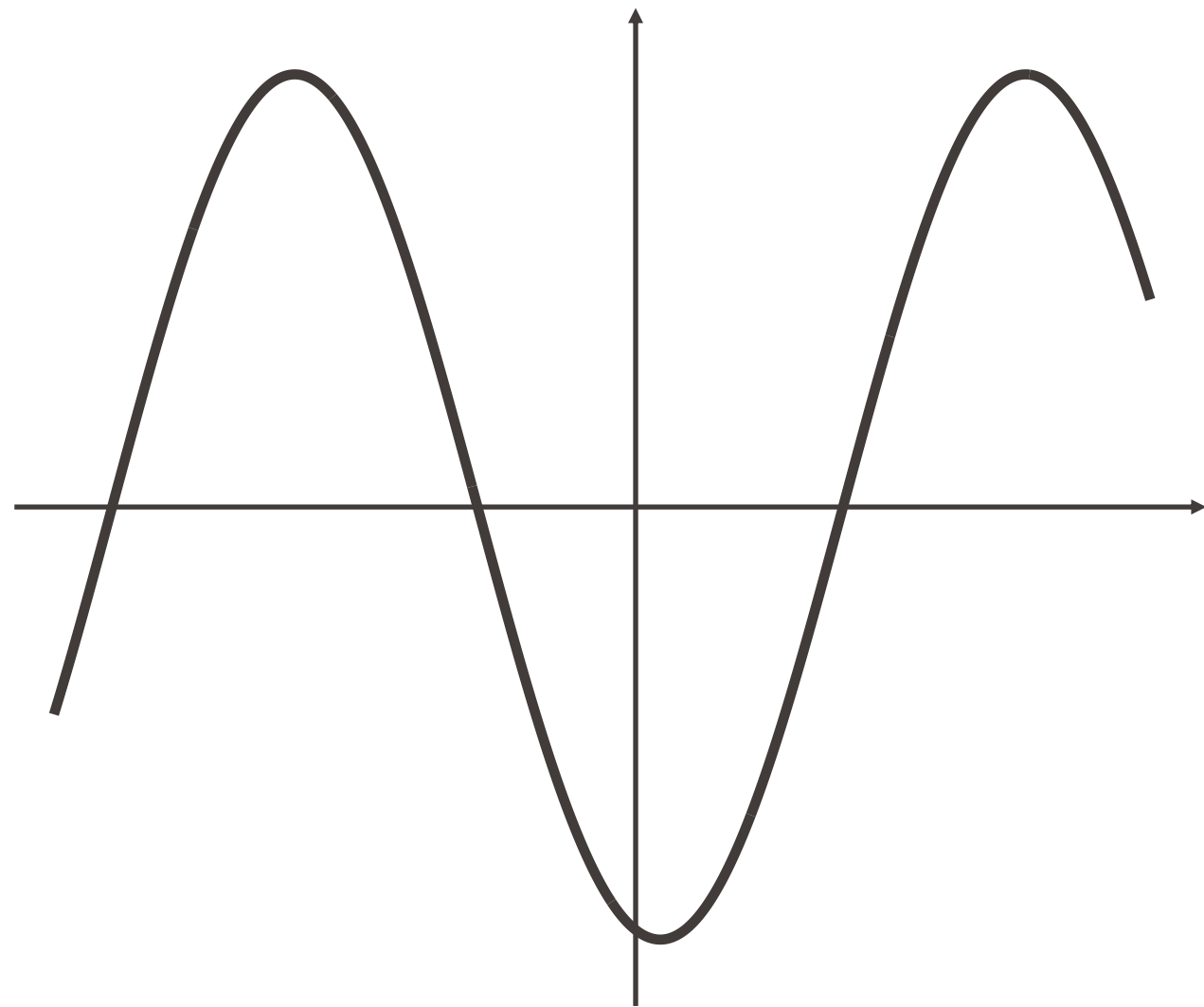
Olivier Lévêque

# Échantillonnage d'un signal

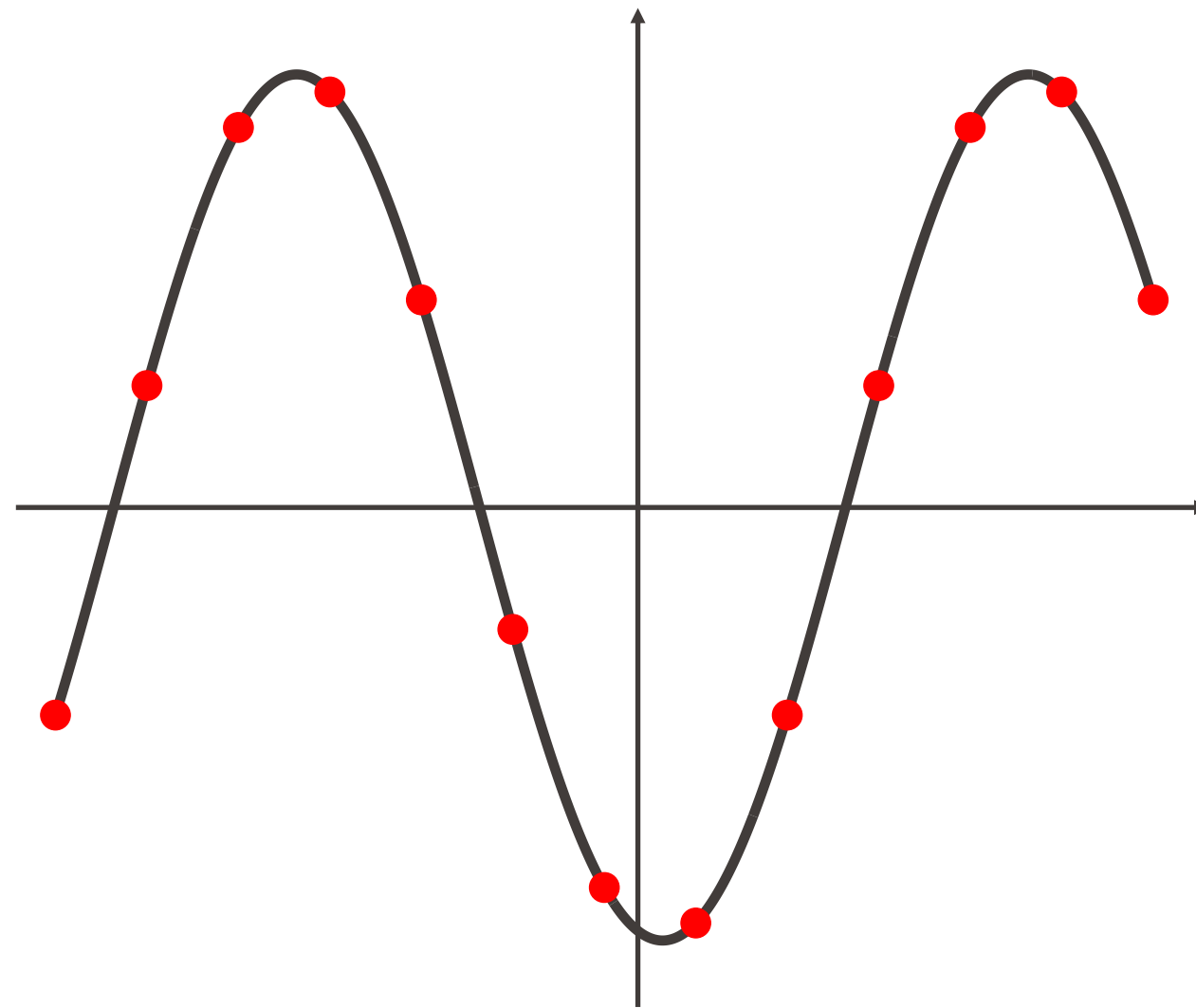
- Comment représenter un signal physique de nature analogique (par exemple, une onde sonore ou électromagnétique) sous forme numérique, c'est-à-dire sous la forme d'une suite de 0 et de 1 ?
- Pour pouvoir **traiter l'information** contenue dans un signal  $(X(t), t \in \mathbb{R})$ , il faut :
  - 1. échantillonner** le signal à des instants discrets
  - 2. quantifier** les valeurs du signal à ces instants
- **Question naturelle** : Que perd-on du signal d'origine à travers ces deux opérations successives?

# Échantillonnage d'un signal

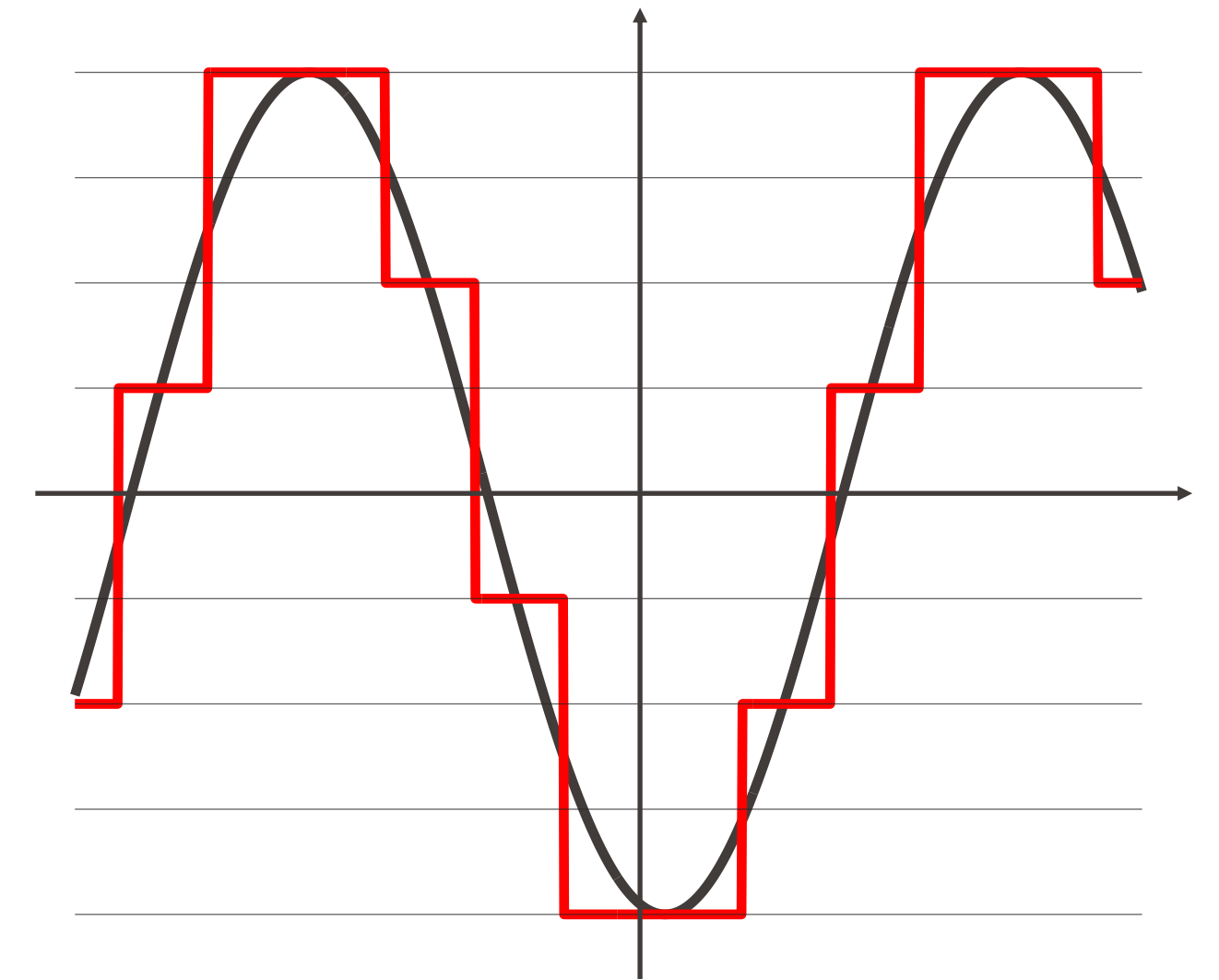
■ signal d'origine



■ signal échantillonné

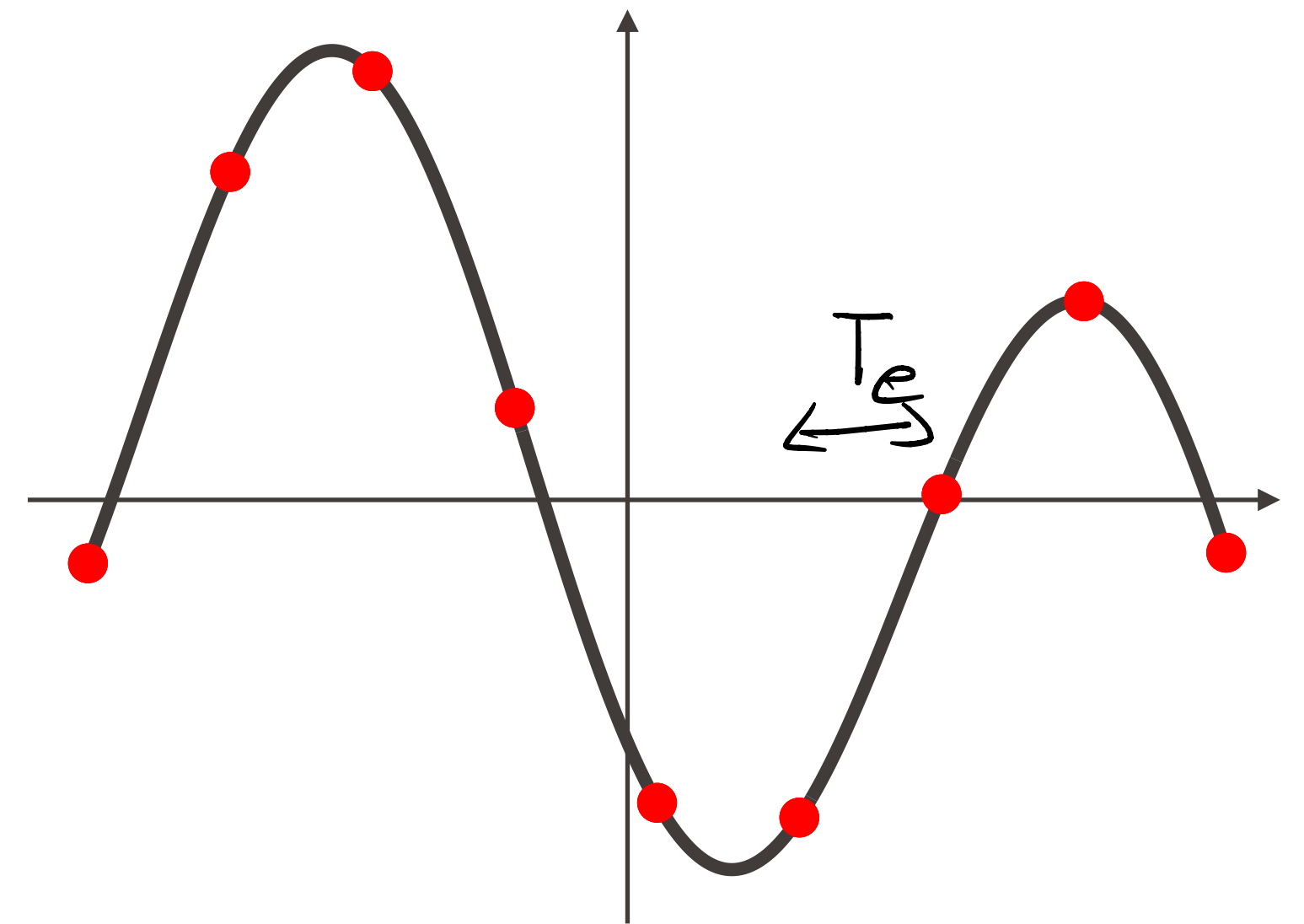
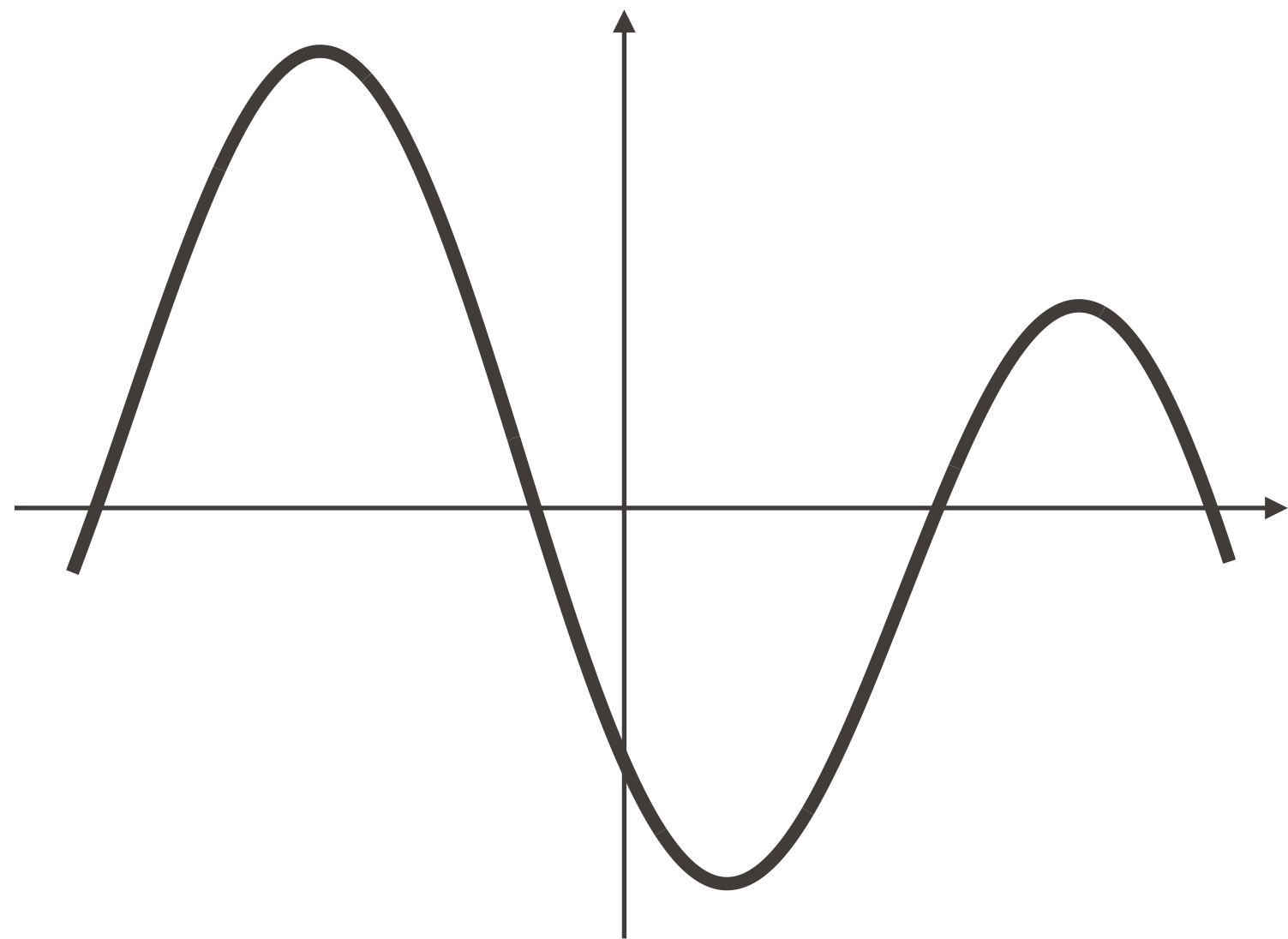


■ signal échantillonné et quantifié



# Échantillonnage d'un signal

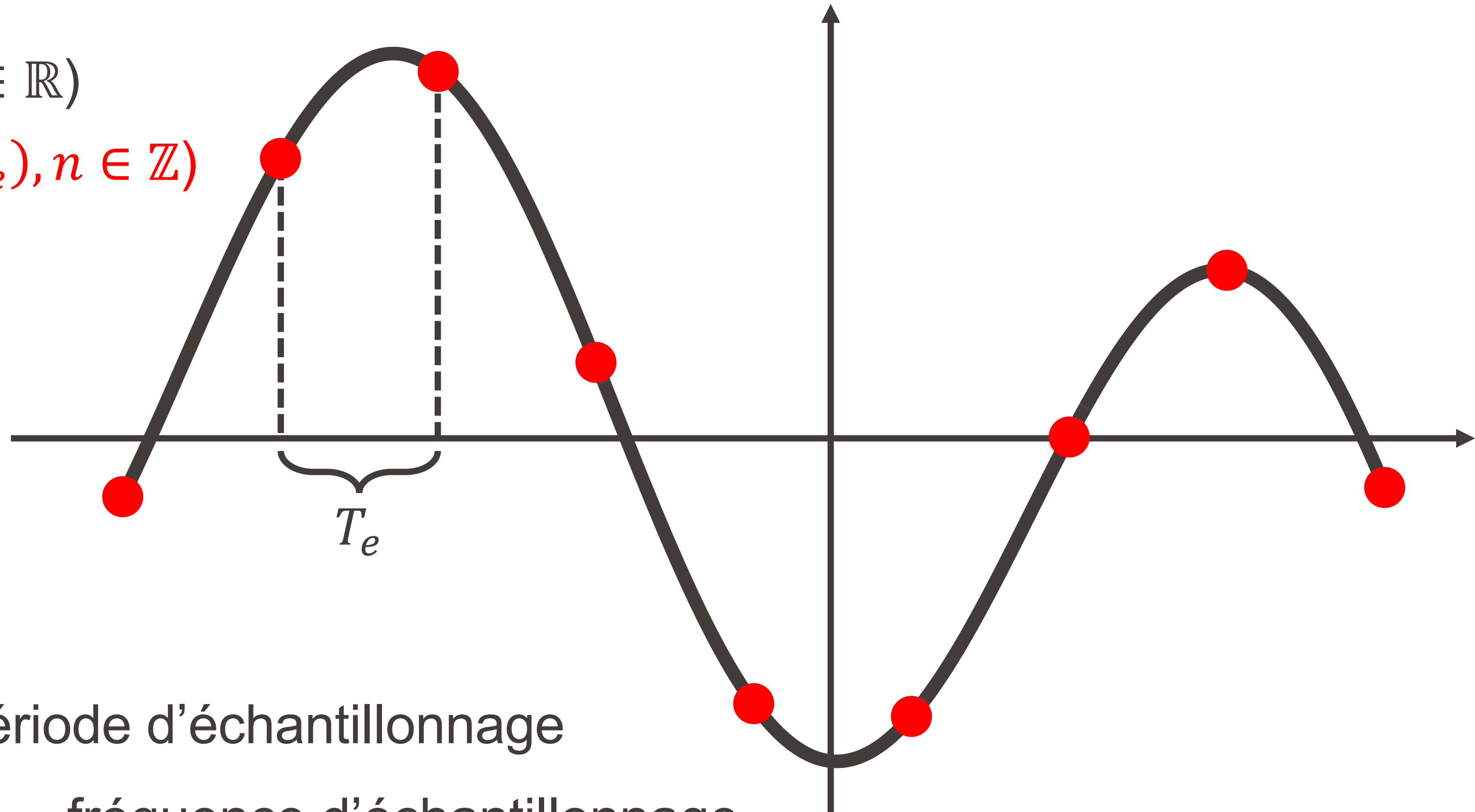
- Nous nous concentrerons ici sur la partie « échantillonnage » :



# Période et fréquence d'échantillonnage

$(X(t), t \in \mathbb{R})$

$\rightarrow (X(nT_e), n \in \mathbb{Z})$

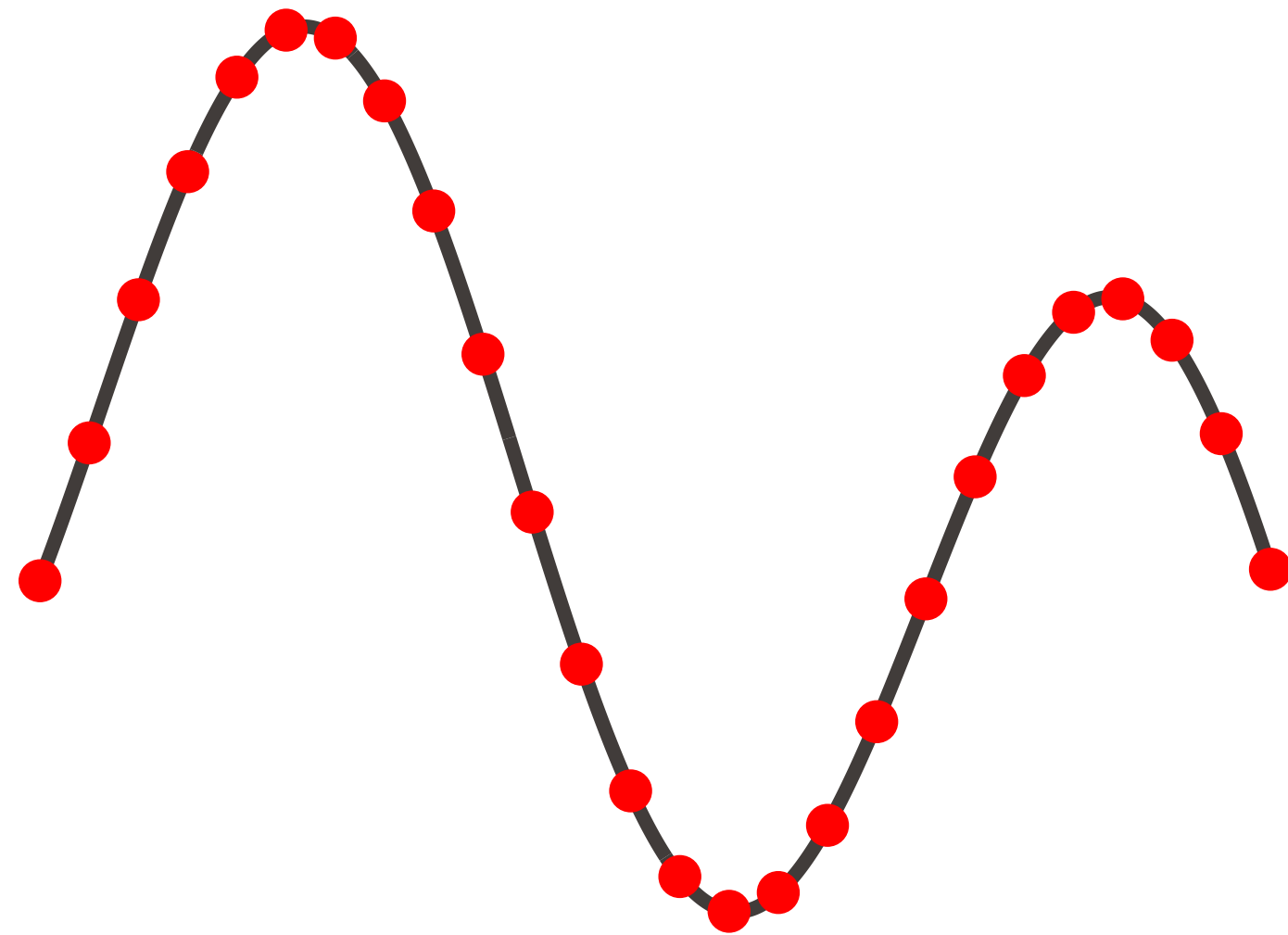


- $T_e$  = période d'échantillonnage
- $f_e = \frac{1}{T_e}$  = fréquence d'échantillonnage

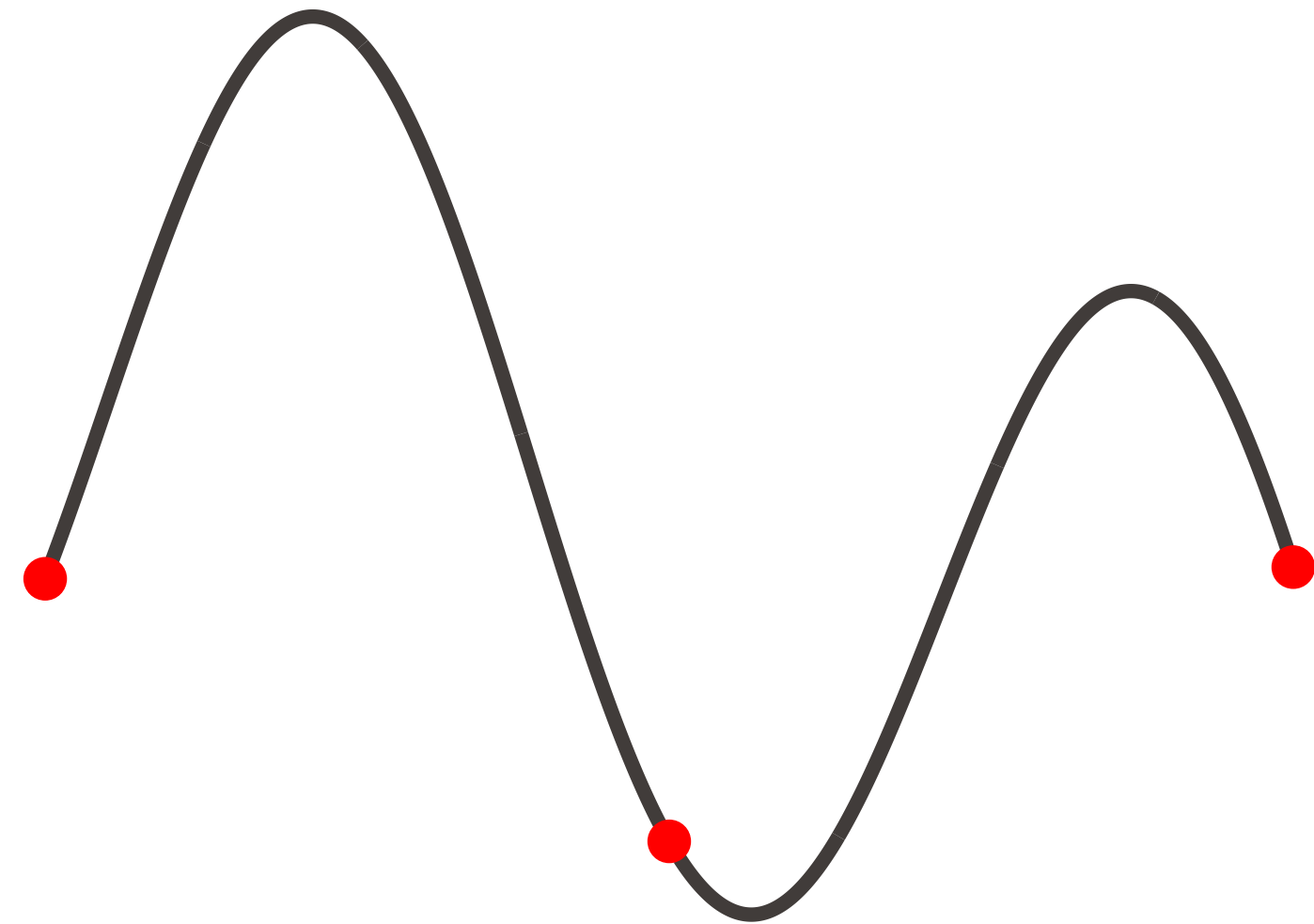
# Période d'échantillonnage $T_e$

==== Quelle période d'échantillonnage  $T_e$  est la «bonne»? =====

- $T_e$  trop petite:  
trop d'information à traiter...



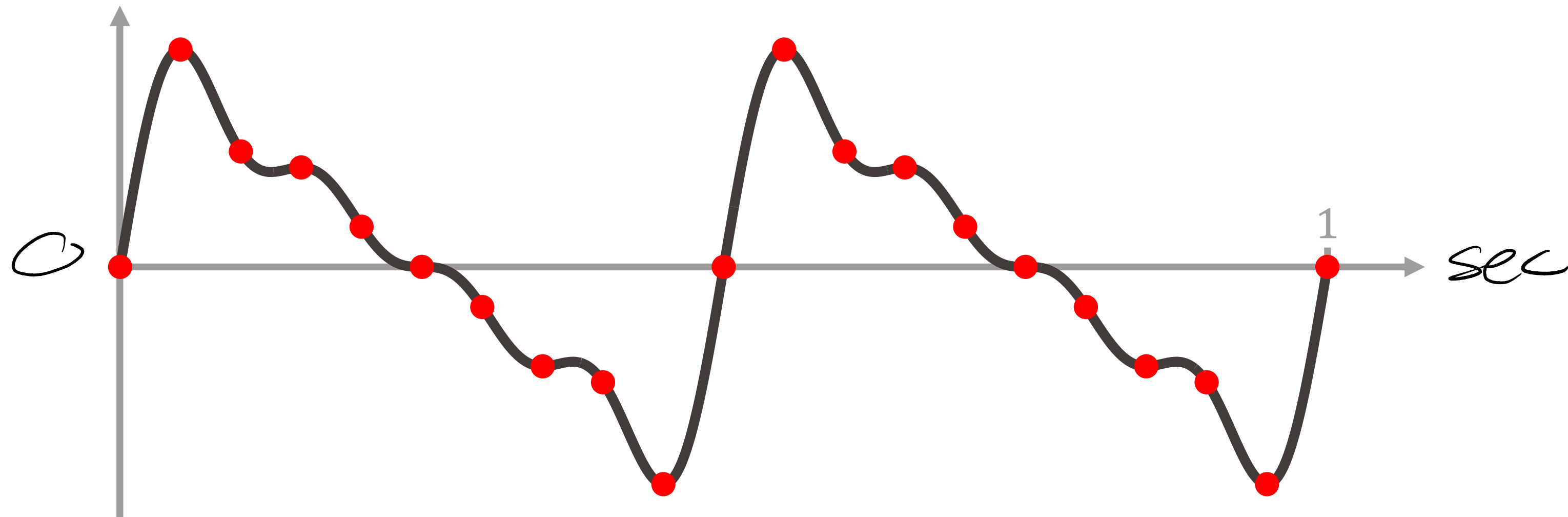
- $T_e$  trop grande:  
de l'information est perdue...



# $T_e$ ne peut pas être aussi grande qu'on veut

**Exemple:** reprenons le signal vu précédemment :

$$X(t) = \sin(4\pi t) + \frac{1}{2} \sin(8\pi t) + \frac{1}{3} \sin(12\pi t) + \frac{1}{4} \sin(16\pi t)$$

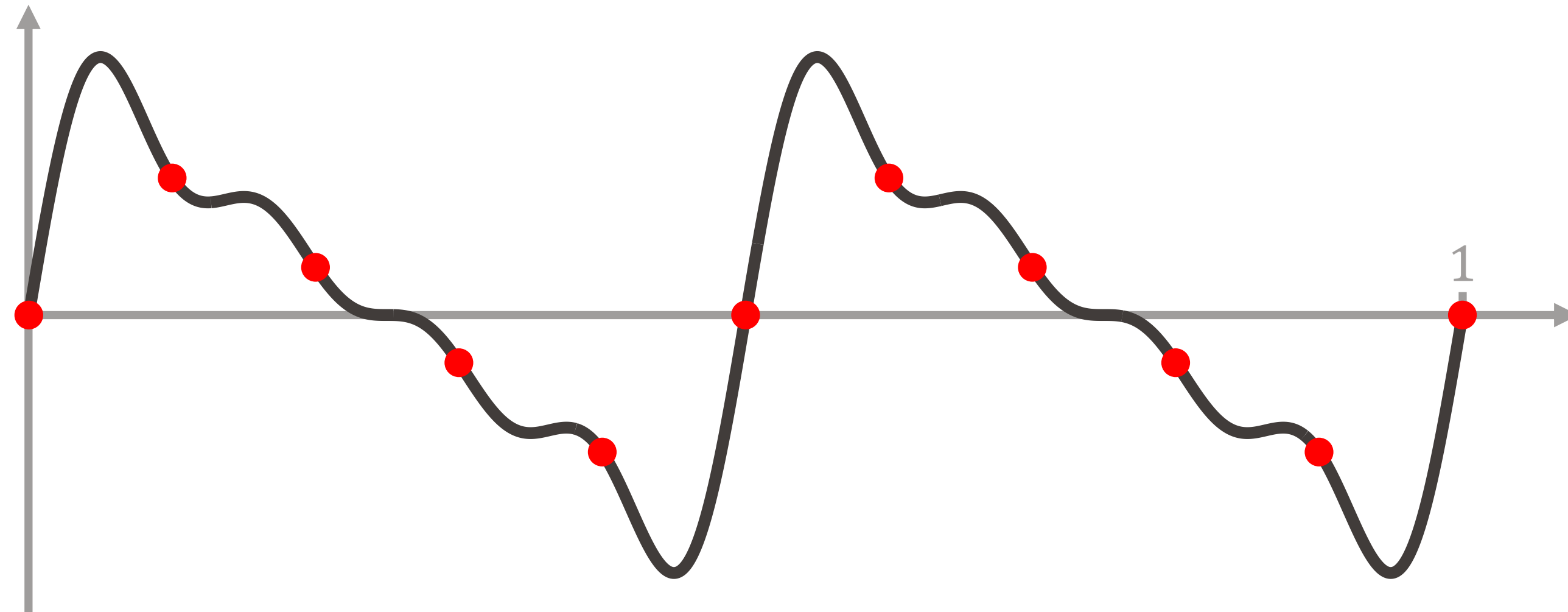


- Période d'échantillonnage  $T_e = 0.05 \text{ sec}$  ( $f_e = 20 \text{ Hz}$ )

# $T_e$ ne peut pas être aussi grande qu'on veut

**Exemple:** reprenons le signal vu précédemment :

$$X(t) = \sin(4\pi t) + \frac{1}{2}\sin(8\pi t) + \frac{1}{3}\sin(12\pi t) + \frac{1}{4}\sin(16\pi t)$$

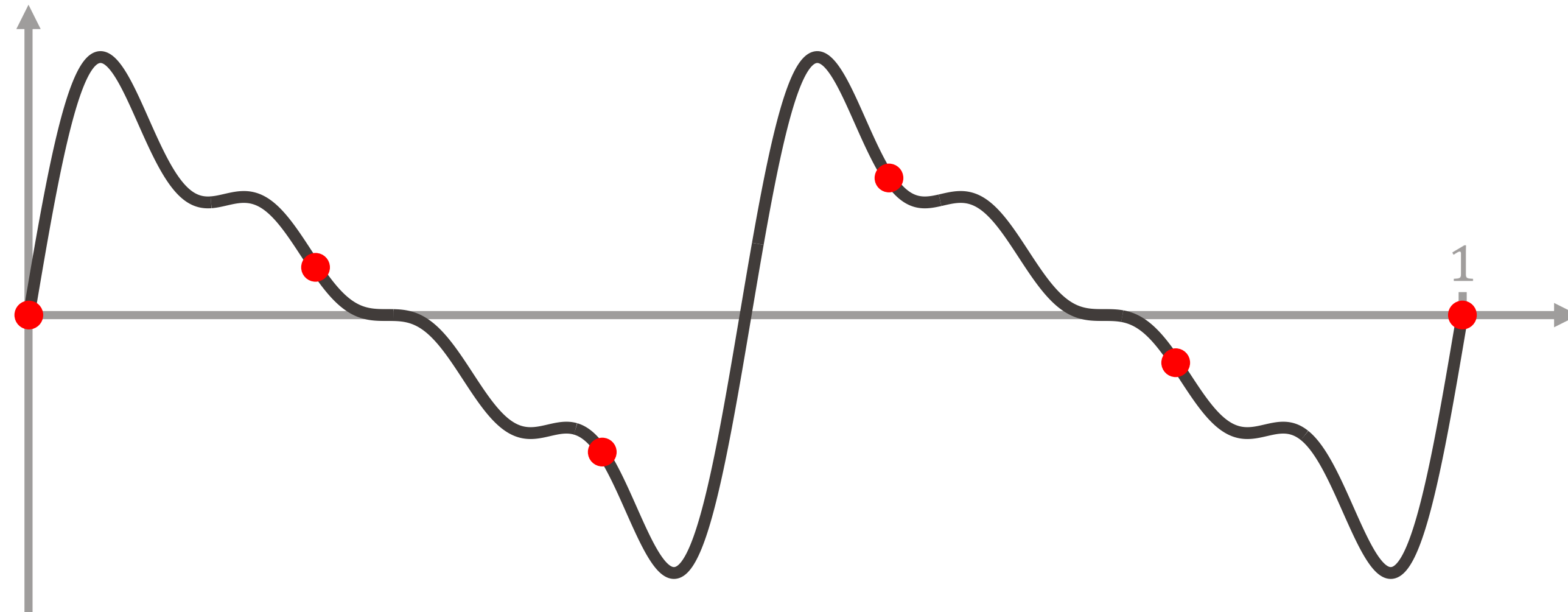


- Période d'échantillonnage  $T_e = 0.1 \text{ sec}$  ( $f_e = 10 \text{ Hz}$ )

# $T_e$ ne peut pas être aussi grande qu'on veut

**Exemple:** reprenons le signal vu précédemment :

$$X(t) = \sin(4\pi t) + \frac{1}{2}\sin(8\pi t) + \frac{1}{3}\sin(12\pi t) + \frac{1}{4}\sin(16\pi t)$$

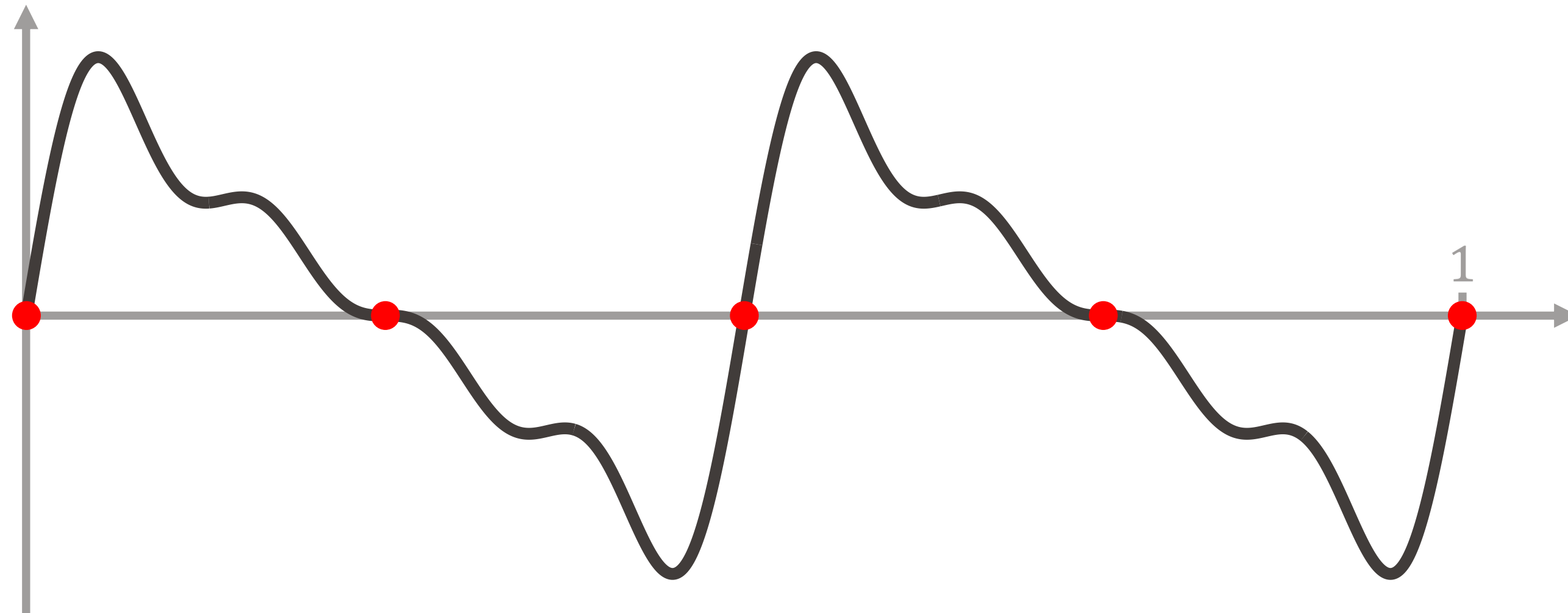


- Période d'échantillonnage  $T_e = 0.2 \text{ sec}$  ( $f_e = 5 \text{ Hz}$ )

# $T_e$ ne peut pas être aussi grande qu'on veut

**Exemple:** reprenons le signal vu précédemment :

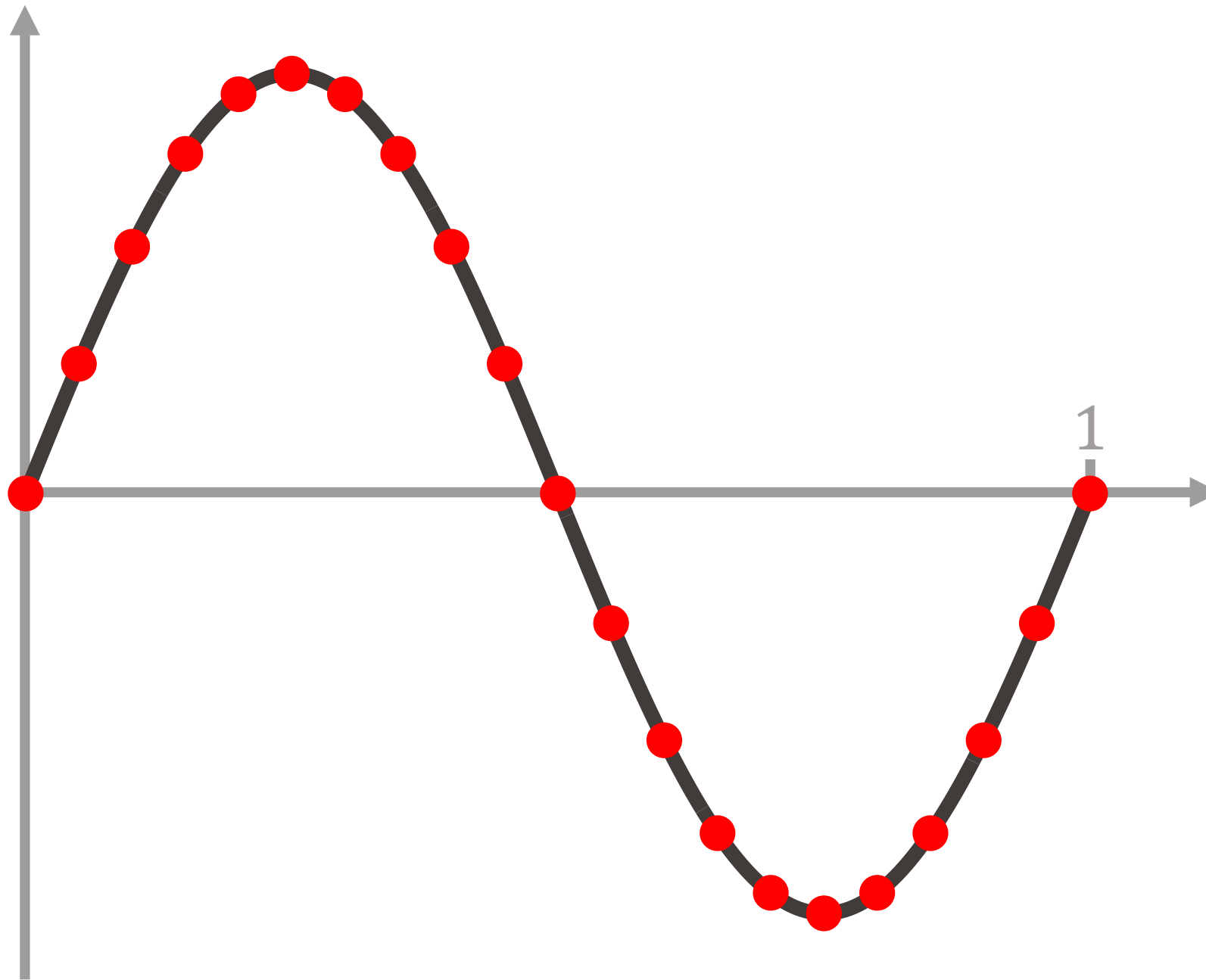
$$X(t) = \sin(4\pi t) + \frac{1}{2}\sin(8\pi t) + \frac{1}{3}\sin(12\pi t) + \frac{1}{4}\sin(16\pi t)$$



- Période d'échantillonnage  $T_e = 0.25 \text{ sec}$  ( $f_e = 4 \text{ Hz}$ )

# Échantillonnage d'une sinusoïde pure

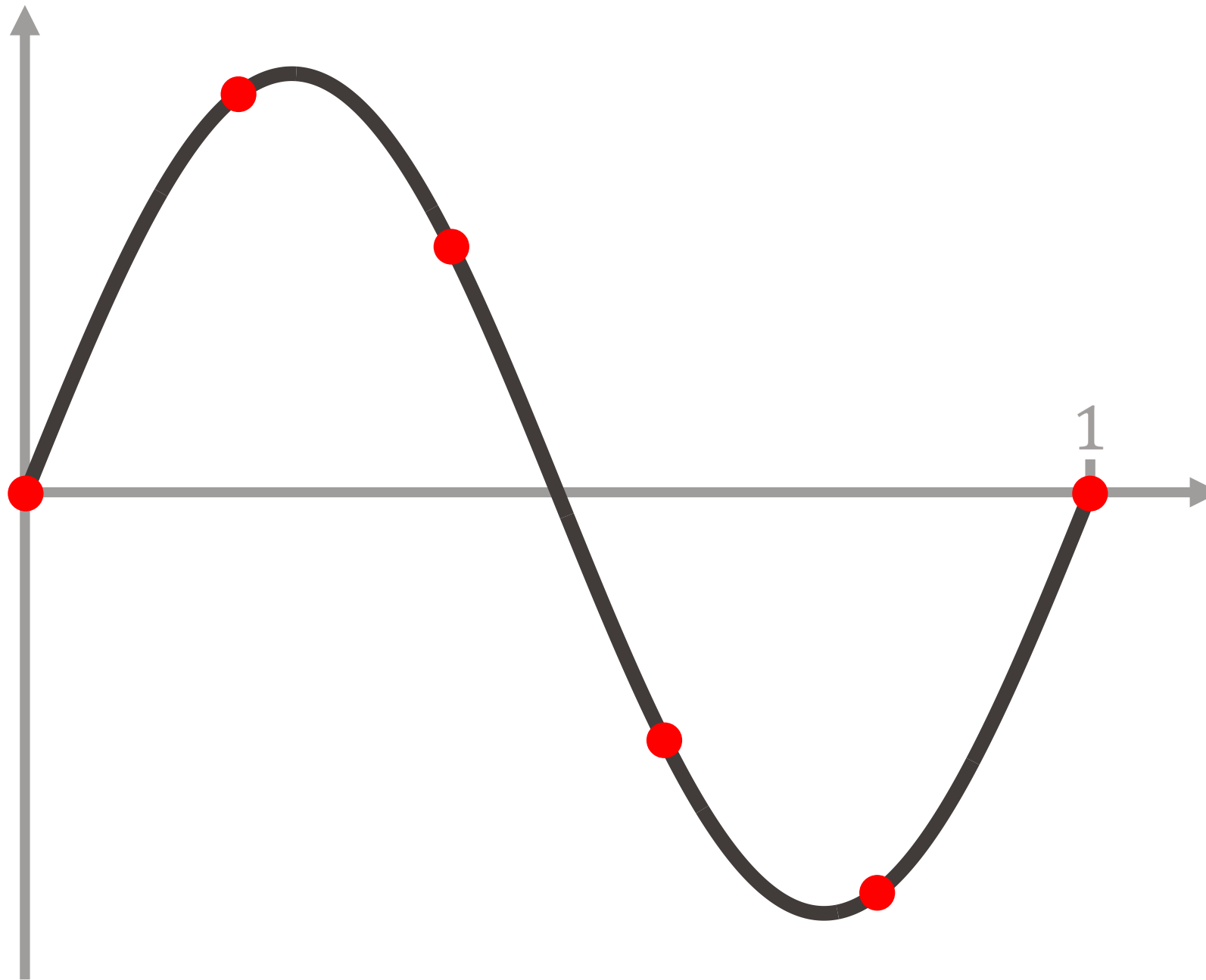
Autre exemple : sinusoïde pure  $X(t) = \sin(2\pi t)$  ( $f = 1\text{Hz}$ )



- Période d'échantillonnage  $T_e = 0.05$  sec ( $f_e = 20$  Hz)

# Échantillonnage d'une sinusoïde pure

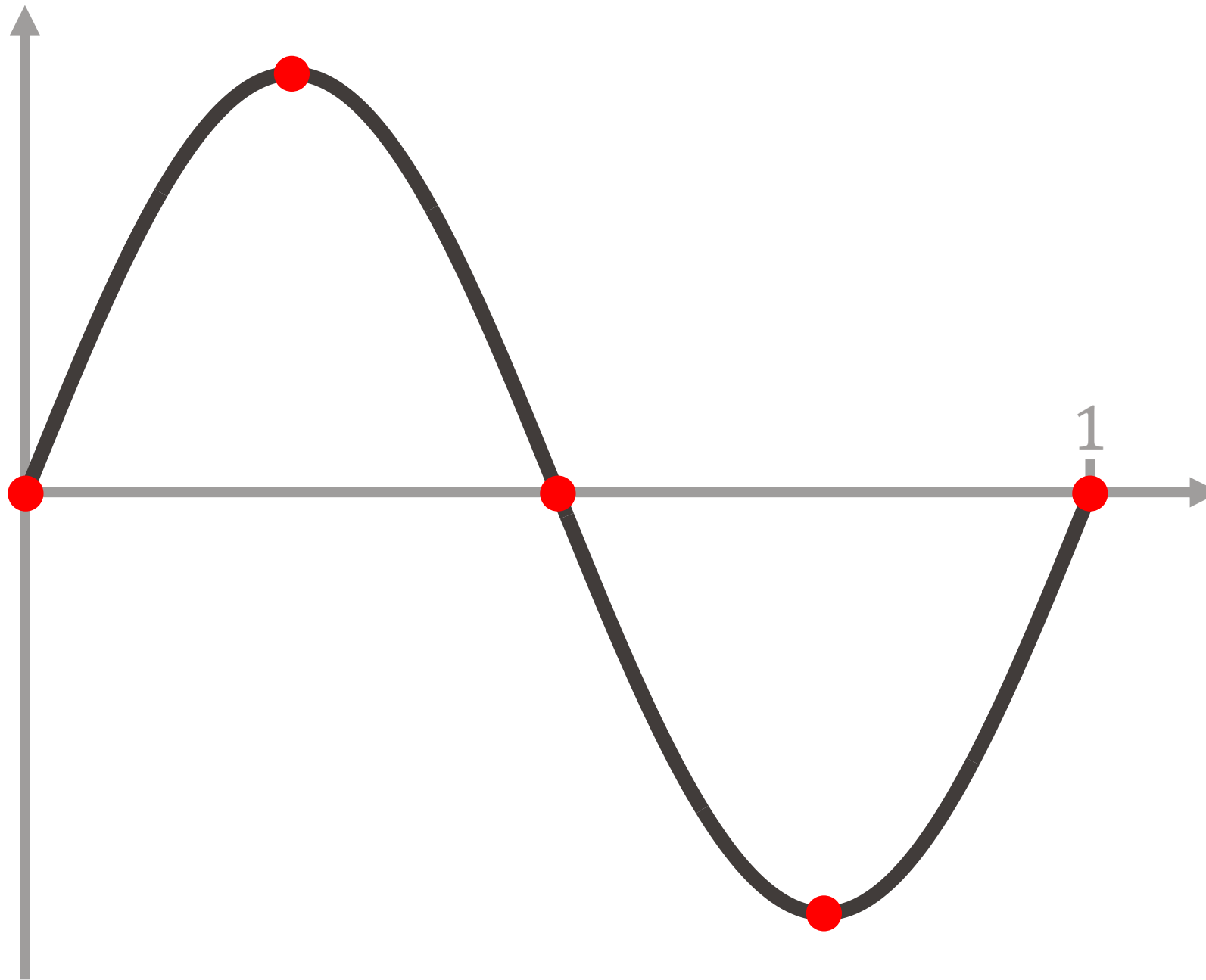
Autre exemple : sinusoïde pure  $X(t) = \sin(2\pi t)$  ( $f = 1\text{Hz}$ )



- Période d'échantillonnage  $T_e = 0.2\text{ sec}$  ( $f_e = 5\text{ Hz}$ )

# Échantillonnage d'une sinusoïde pure

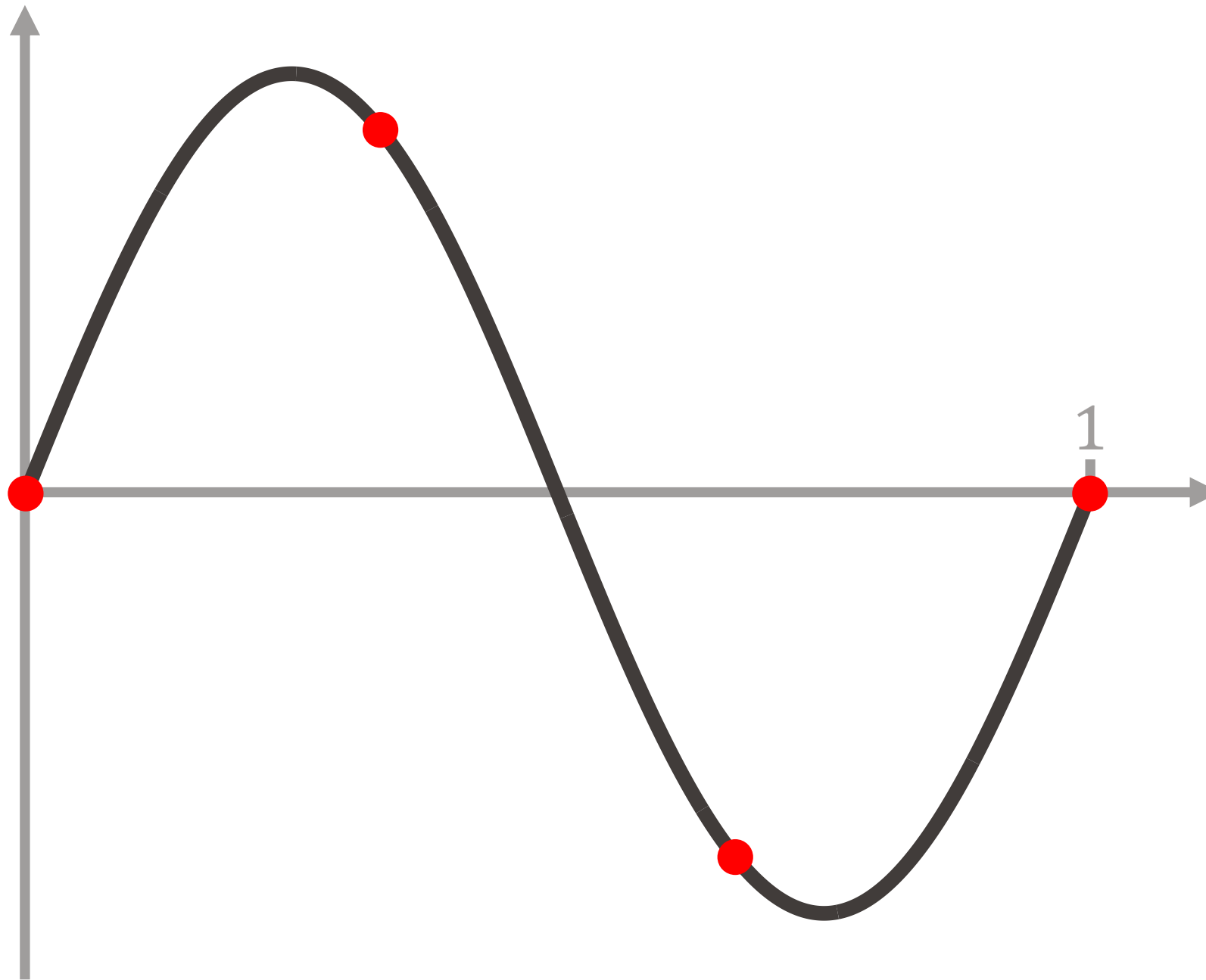
Autre exemple : sinusoïde pure  $X(t) = \sin(2\pi t)$  ( $f = 1\text{Hz}$ )



- Période d'échantillonnage  $T_e = 0.25\text{ sec}$  ( $f_e = 4\text{ Hz}$ )

# Échantillonnage d'une sinusoïde pure

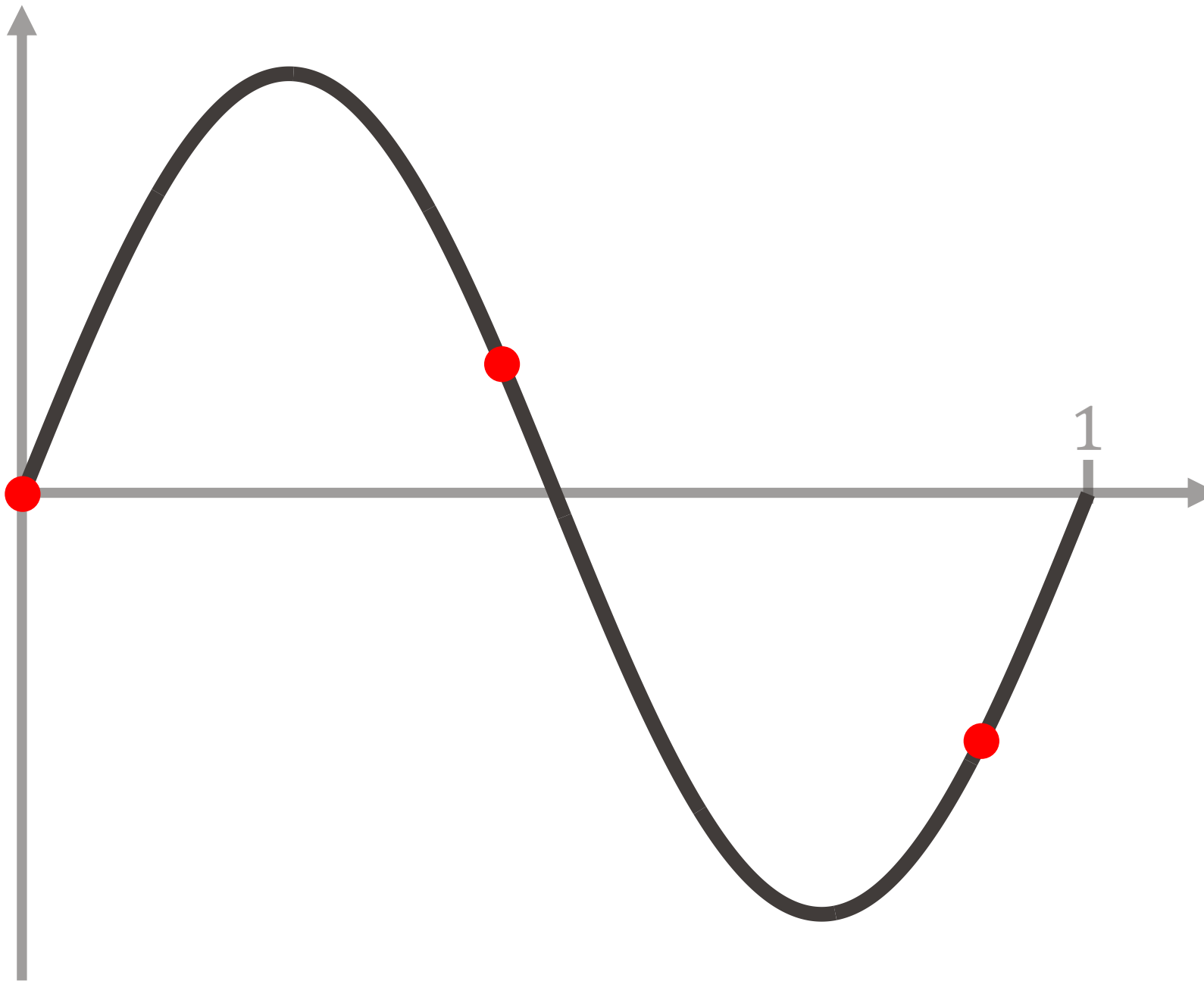
Autre exemple : sinusoïde pure  $X(t) = \sin(2\pi t)$  ( $f = 1\text{Hz}$ )



- Période d'échantillonnage  $T_e = 0.\bar{3}$  sec ( $f_e = 3\text{ Hz}$ )

# Échantillonnage d'une sinusoïde pure

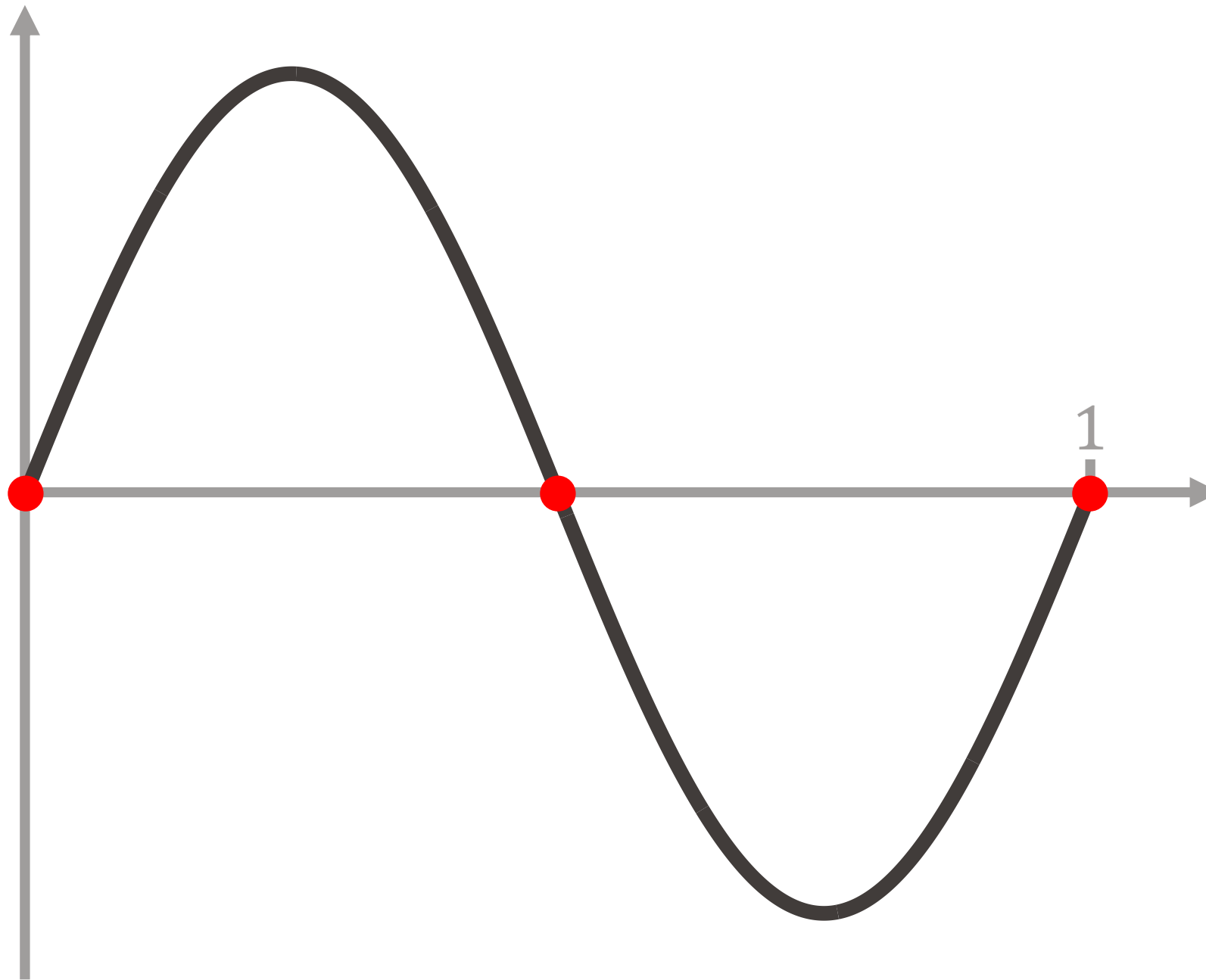
Autre exemple : sinusoïde pure  $X(t) = \sin(2\pi t)$  ( $f = 1\text{Hz}$ )



- Période d'échantillonnage  $T_e = 0.45\text{ sec}$  ( $f_e = 2.\bar{2}\text{ Hz}$ )

# Échantillonnage d'une sinusoïde pure

Autre exemple : sinusoïde pure  $X(t) = \sin(2\pi t)$  ( $f = 1\text{Hz}$ )

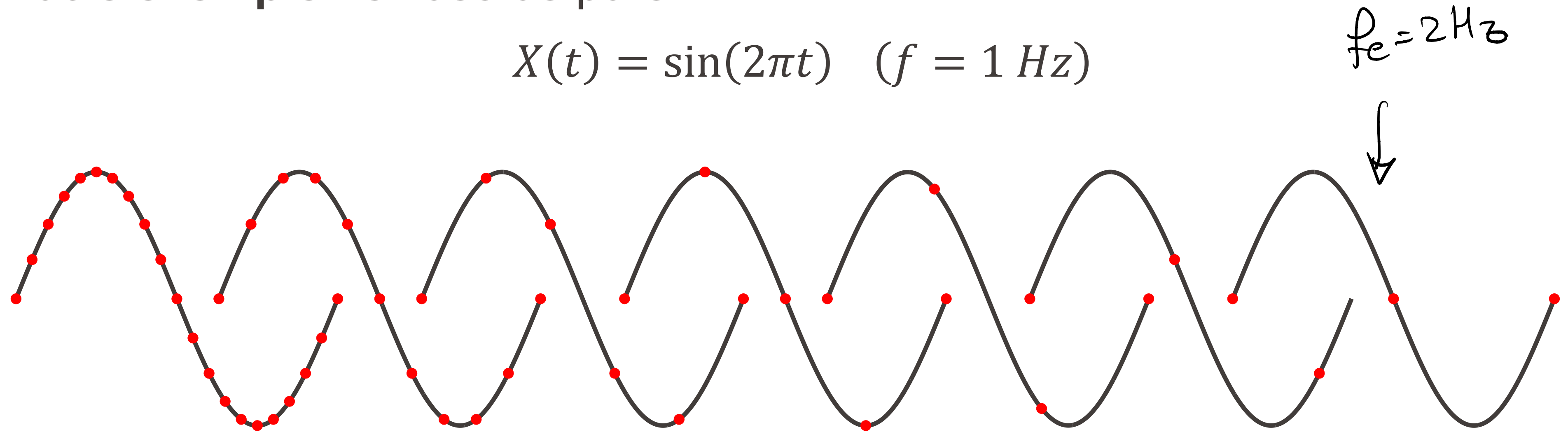


- Période d'échantillonnage  $T_e = 0.5 \text{ sec}$  ( $f_e = 2 \text{ Hz}$ )

# Échantillonnage d'une sinusoïde pure

Autre exemple : sinusoïde pure

$$X(t) = \sin(2\pi t) \quad (f = 1 \text{ Hz})$$



Pour pouvoir reconstruire la sinusoïde à partir de l'échantillon, il est nécessaire que  $T_e < 0.5 \text{ sec}$ , autrement dit, que  $f_e = \frac{1}{T_e} > 2 \text{ Hz}$ .

# Échantillonnage d'une sinusoïde pure

- De manière plus générale, on peut dire la chose suivante :

Soit  $X(t)$  une sinusoïde pure dont la fréquence est plus petite ou égale à  $f$ .

Pour pouvoir reconstruire cette sinusoïde à partir de sa version échantillonnée à la fréquence  $f_e$ , il est nécessaire que :

$$f_e > 2f$$

- Le **théorème d'échantillonnage** que nous verrons prochainement dit (essentiellement) que cette condition est non seulement **nécessaire** mais aussi **suffisante**.
- Nous verrons également que **ce théorème s'applique à tous les signaux**, et pas seulement aux sinusoïdes.

$$\Rightarrow \underline{f_e > 2B}$$

# Et si $f_e < 2f$ , que se passe-t-il ?

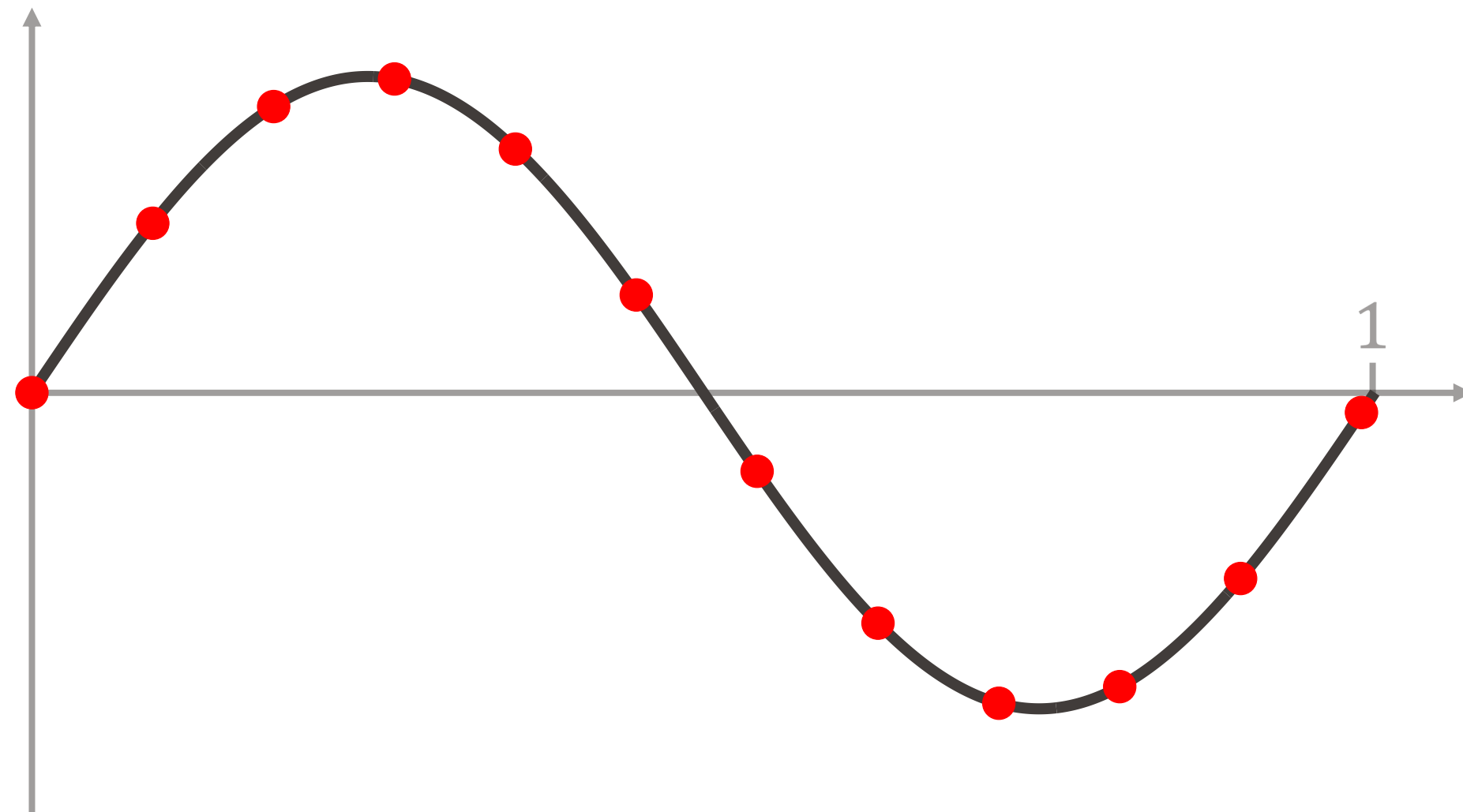
Que se passe-t-il lorsque la fréquence d'échantillonnage  $f_e$  est trop basse, i.e. lorsque le signal est **sous-échantillonné** ?

- Nous poursuivons avec l'exemple d'une sinusoïde pure :

$$X(t) = \sin(2\pi f \cdot t),$$

échantillonnée avec une période  $T_e = 0.09$  sec, donc  $f_e = \frac{1}{0.09} = 11.\overline{11} \text{ Hz}$ .

- $f = 1 \text{ Hz}$



# Et si $f_e < 2f$ , que se passe-t-il ?

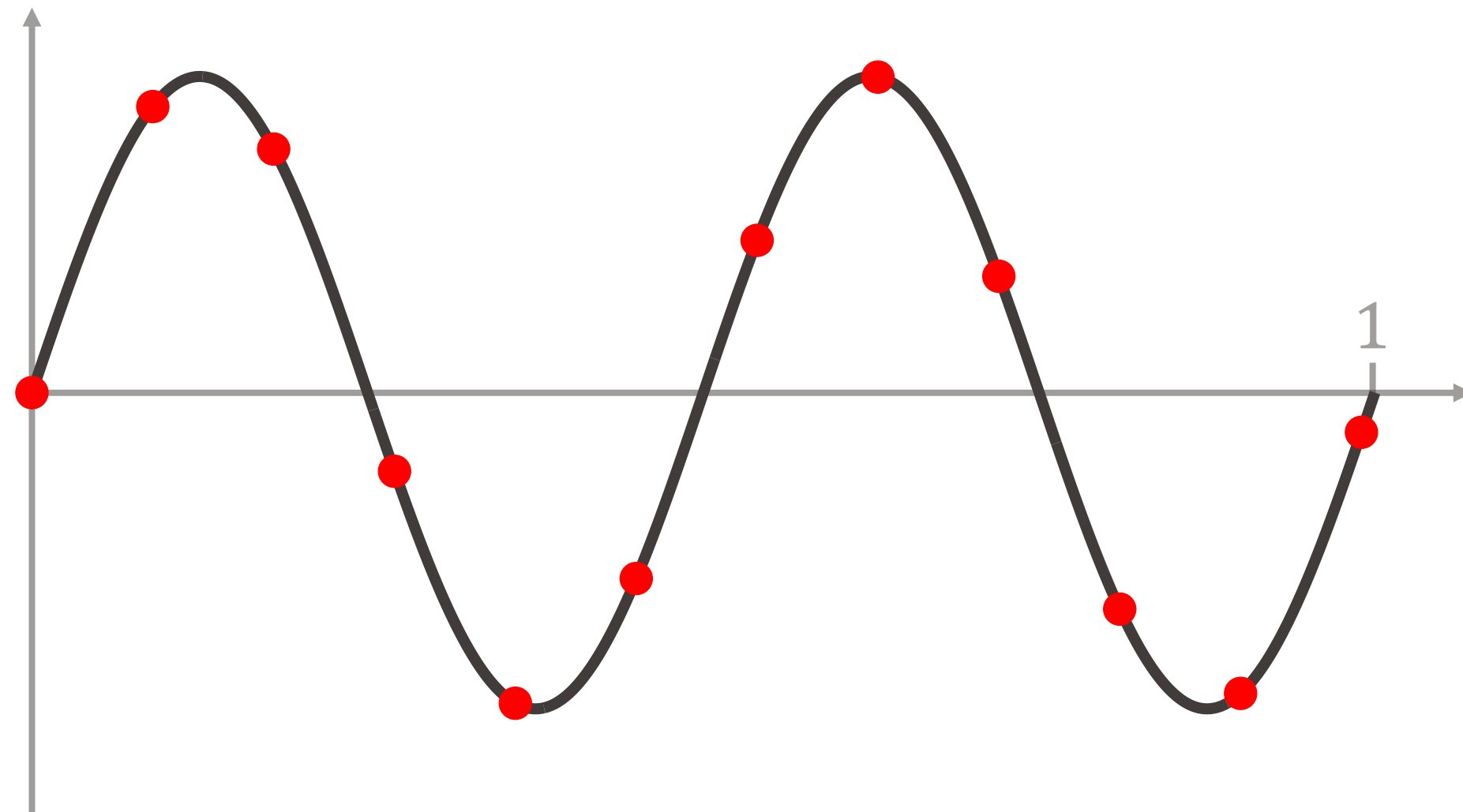
Que se passe-t-il lorsque la fréquence d'échantillonnage  $f_e$  est trop basse, i.e. lorsque le signal est **sous-échantillonné** ?

- Nous poursuivons avec l'exemple d'une sinusoïde pure :

$$X(t) = \sin(2\pi f \cdot t),$$

échantillonnée avec une période  $T_e = 0.09$  sec, donc  $f_e = \frac{1}{0.09} = 11.\overline{11} \text{ Hz}$ .

- $f = 1 \text{ Hz}$
- $f = 2 \text{ Hz}$



# Et si $f_e < 2f$ , que se passe-t-il ?

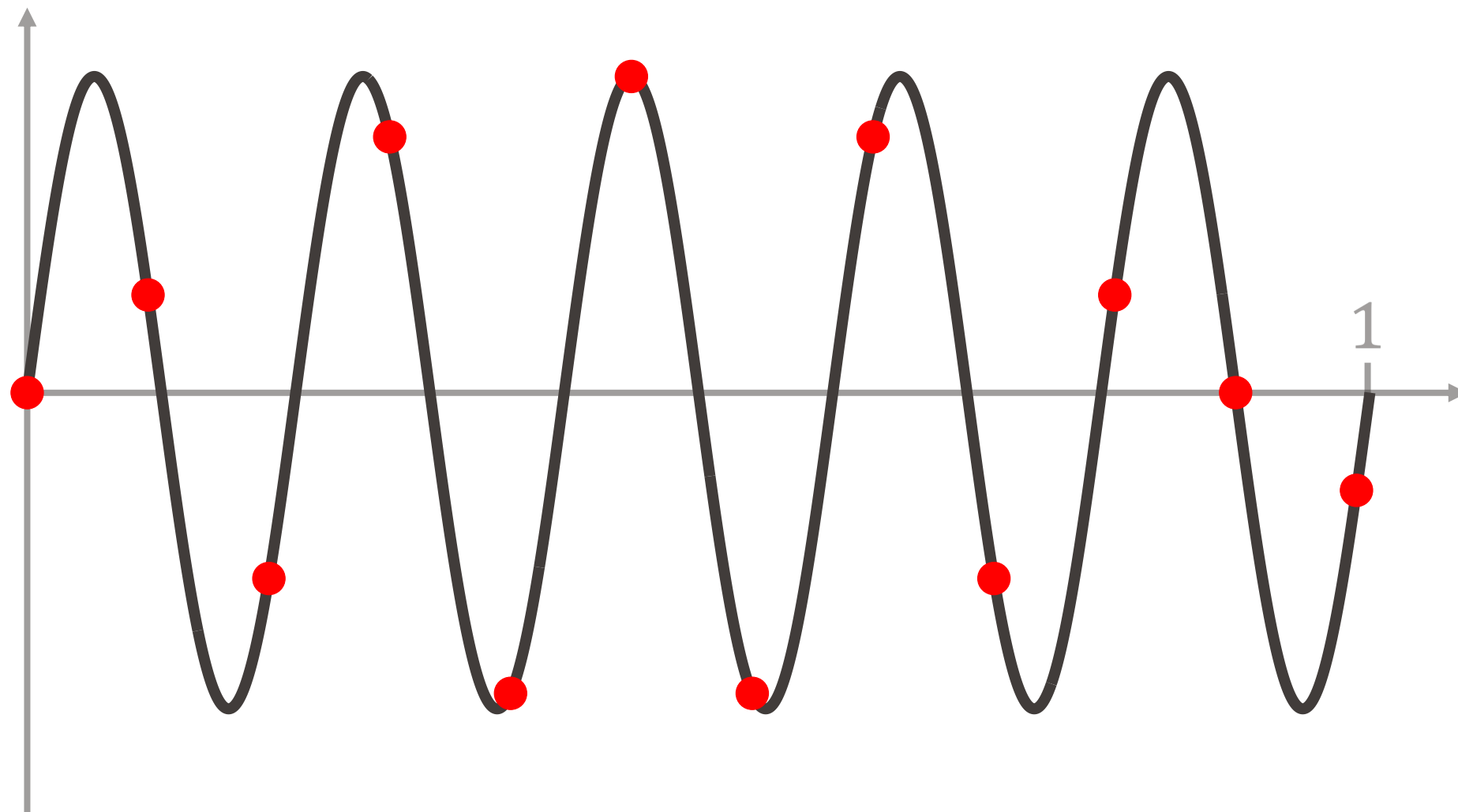
Que se passe-t-il lorsque la fréquence d'échantillonnage  $f_e$  est trop basse, i.e. lorsque le signal est **sous-échantillonné** ?

- Nous poursuivons avec l'exemple d'une sinusoïde pure :

$$X(t) = \sin(2\pi f \cdot t),$$

échantillonnée avec une période  $T_e = 0.09$  sec, donc  $f_e = \frac{1}{0.09} = 11.\overline{11} \text{ Hz}$ .

- $f = 1 \text{ Hz}$
- $f = 2 \text{ Hz}$
- $f = 5 \text{ Hz}$



# Et si $f_e < 2f$ , que se passe-t-il ?

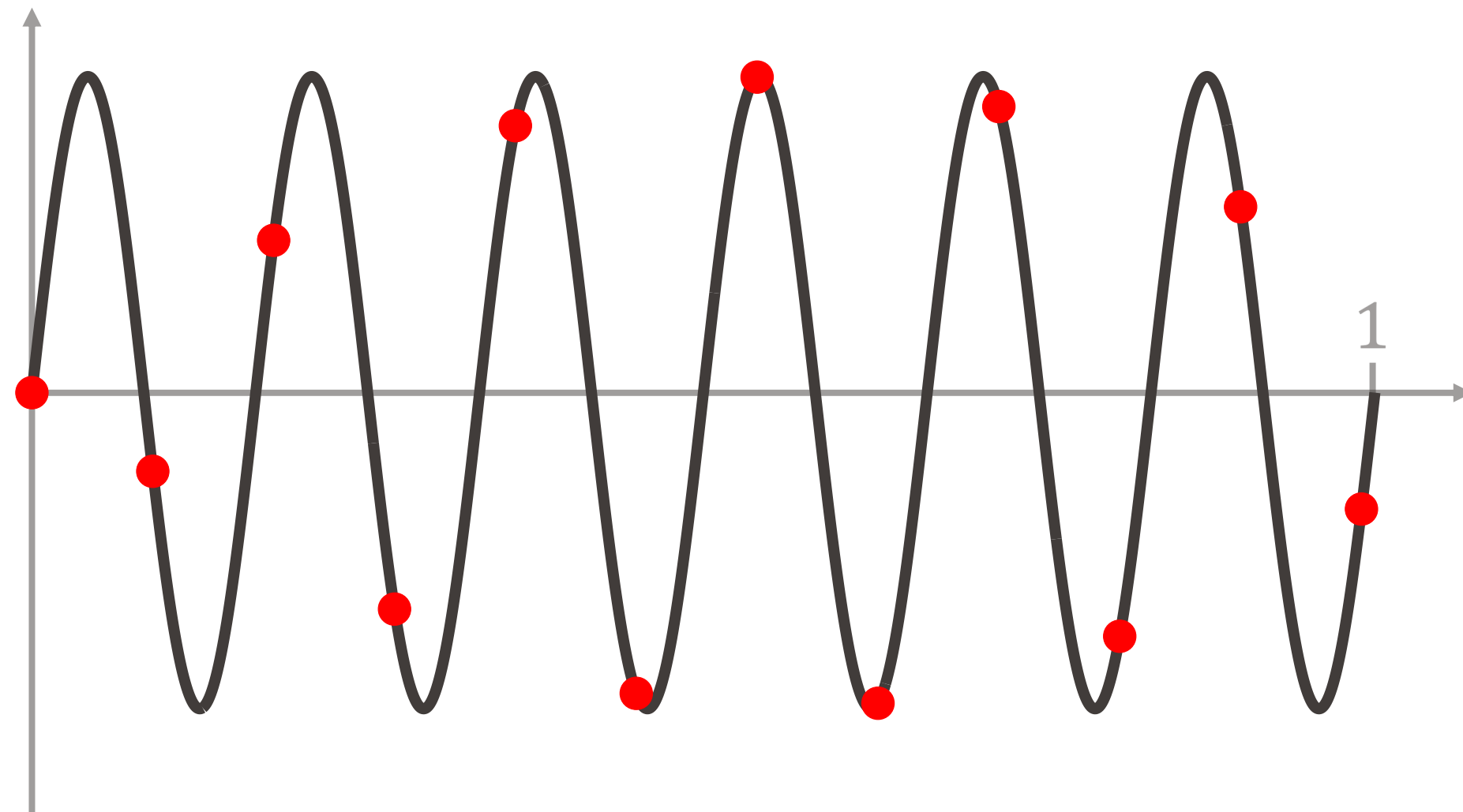
Que se passe-t-il lorsque la fréquence d'échantillonnage  $f_e$  est trop basse, i.e. lorsque le signal est **sous-échantillonné** ?

- Nous poursuivons avec l'exemple d'une sinusoïde pure :

$$X(t) = \sin(2\pi f \cdot t),$$

échantillonnée avec une période  $T_e = 0.09$  sec, donc  $f_e = \frac{1}{0.09} = 11.\overline{11} \text{ Hz}$ .

- $f = 1 \text{ Hz}$
- $f = 2 \text{ Hz}$
- $f = 5 \text{ Hz}$
- $f = 6 \text{ Hz}$



# Et si $f_e < 2f$ , que se passe-t-il ?

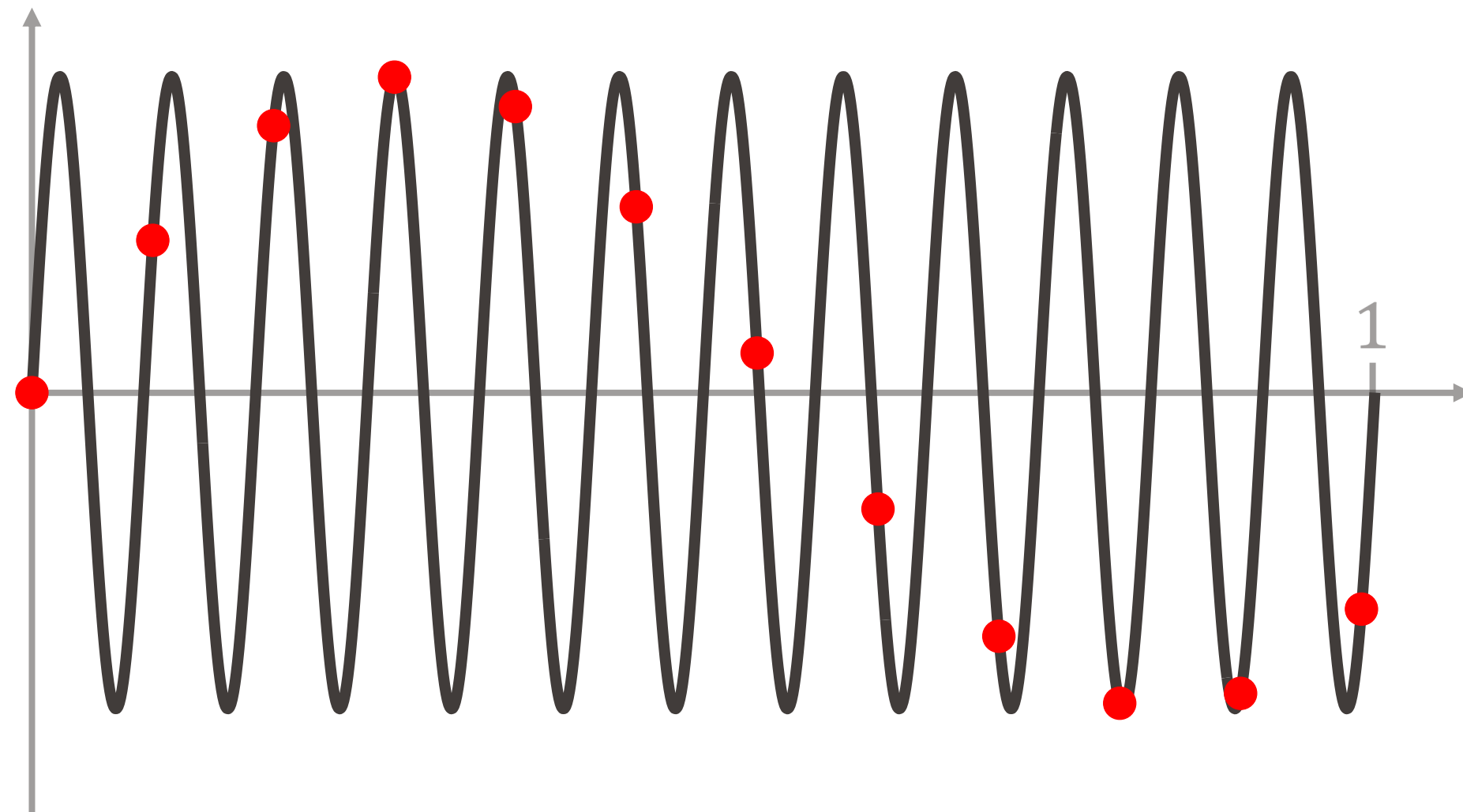
Que se passe-t-il lorsque la fréquence d'échantillonnage  $f_e$  est trop basse, i.e. lorsque le signal est **sous-échantillonné** ?

- Nous poursuivons avec l'exemple d'une sinusoïde pure :

$$X(t) = \sin(2\pi f \cdot t),$$

échantillonnée avec une période  $T_e = 0.09$  sec, donc  $f_e = \frac{1}{0.09} = 11.\overline{11} \text{ Hz}$ .

- $f = 1 \text{ Hz}$
- $f = 2 \text{ Hz}$
- $f = 5 \text{ Hz}$
- $f = 6 \text{ Hz}$
- $f = 12 \text{ Hz}$



# Et si $f_e < 2f$ , que se passe-t-il ?

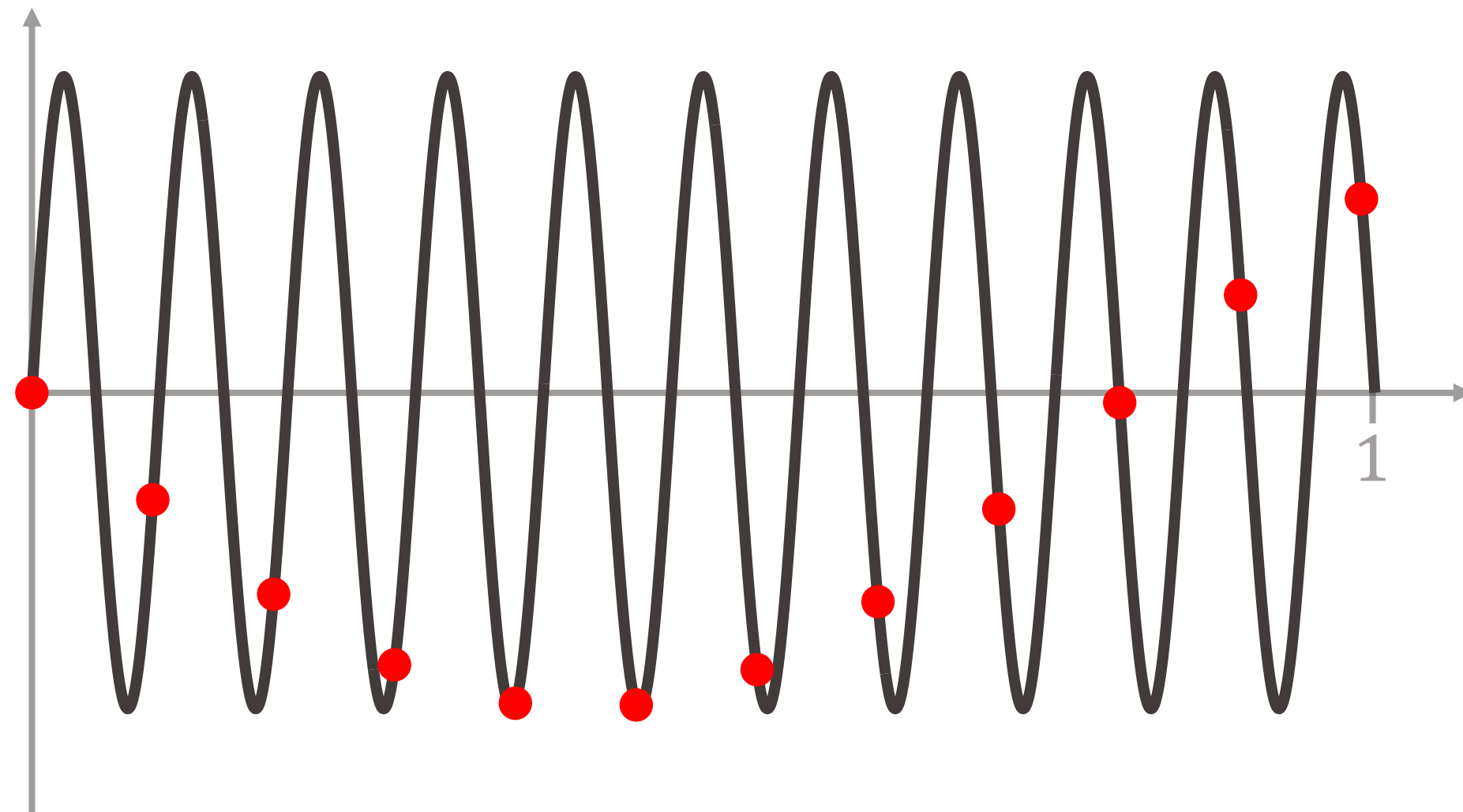
Que se passe-t-il lorsque la fréquence d'échantillonnage  $f_e$  est trop basse, i.e. lorsque le signal est **sous-échantillonné** ?

- Nous poursuivons avec l'exemple d'une sinusoïde pure :

$$X(t) = \sin(2\pi f \cdot t),$$

échantillonnée avec une période  $T_e = 0.09$  sec, donc  $f_e = \frac{1}{0.09} = 11.\overline{11} \text{ Hz}$ .

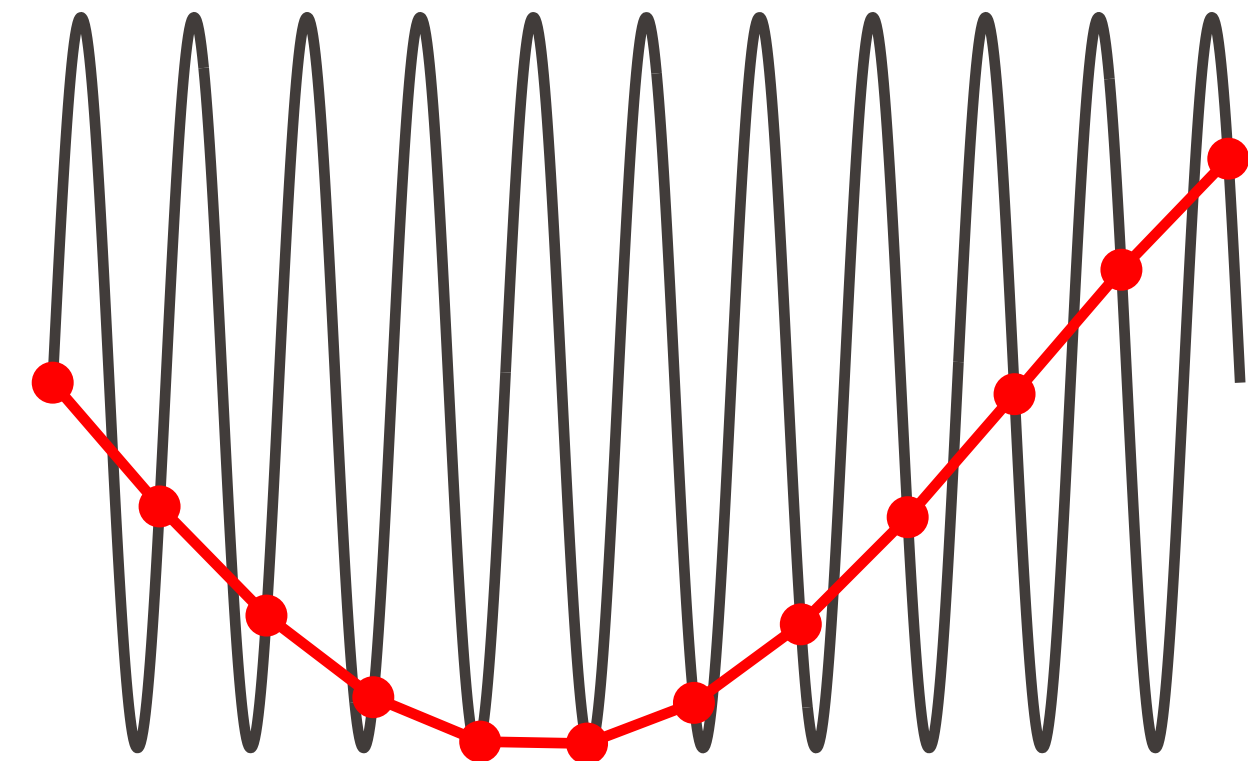
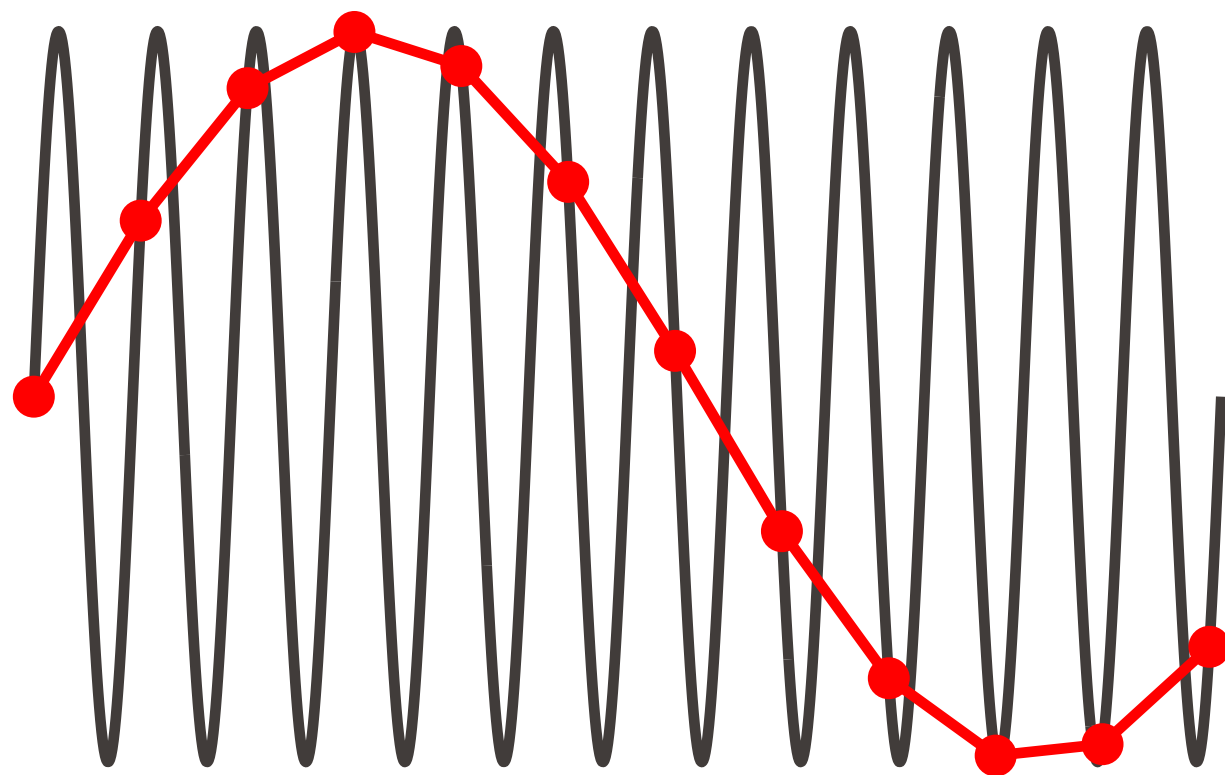
- $f = 1 \text{ Hz}$
- $f = 2 \text{ Hz}$
- $f = 5 \text{ Hz}$
- $f = 6 \text{ Hz}$
- $f = 12 \text{ Hz}$
- $f = 10.5 \text{ Hz}$



# Et si $f_e < 2f$ , que se passe-t-il ?

Dans les deux derniers cas, nous avons vu apparaître :

- une sinusoïde avec une **fréquence plus lente**
- une autre sinusoïde, avec une **fréquence plus lente et qui part d'abord vers le bas.**



Ce phénomène s'appelle l'**effet stroboscopique** et survient donc lorsqu'on **sous-échantillonne** un signal.

# Effet stroboscopique : illustrations

- **Exemple visuel** (avec un sous-échantillonnage à deux dimensions) :



- **Exemples de vidéos :**

<http://www.youtube.com/watch?v=jHS9JGkEOmA>

<http://www.youtube.com/watch?v=LVwmtwZLG88>

<https://www.youtube.com/watch?v=2lghwseolSc>