Contre-exemples pour la méthode des multiplicateurs de Lagrange

1 Rappel

Soient $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fonctions C^1 sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Considérons le problème d'optimisation sous contrainte : trouver le minimum (ou maximum) global de f sous la contrainte $g(x) = 0$.

La méthode des multiplicateurs de Lagrange repose sur la condition nécessaire suivante :
si x_0 est un extremum lié de f sous la contrainte $g(x_0) = 0$ et que $\nabla g(x_0) \neq 0$, alors il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que (x_0, λ_0) est un point stationnaire du lagrangien $F(x, \lambda) = f(x) - \lambda g(x)$.

Dans les exemples du cours, de même que dans les séries, nous n'avons jamais vérifié la condition $\nabla g(x_0) \neq 0$ car nos exemples/problèmes ont toujours été posés dans des cas où l'égalité ne pouvait pas être satisfaite : aucun point stationnaire de g ne se trouve sur l'ensemble de niveau $g(x) = 0$.

Dans les faits, on devrait toujours prendre le temps de vérifier cette condition : quand elle n'est pas satisfaite, la méthode des multiplicateurs de Lagrange peut échouer. Un point x_0 tel que $\nabla g(x_0) = 0$ peut ou non être un extremum lié, et ne pas se trouver dans la liste des points stationnaires du Lagrangien.

Plusieurs exemples sont présentés ci-dessous.

2 Cas $\nabla g(x_0) = 0$: x_0 est un extremum lié mais ne se trouve pas dans les points stationnaires de F

Soient $f(x, y) = y$ et $g(x, y) = y^3 - x^2 = 0$. Observons que $\nabla g(x, y) = (-2x, 3y^2)$. On a donc $g(0, 0) = 0$ et $\nabla g(0, 0) = (0, 0)$.

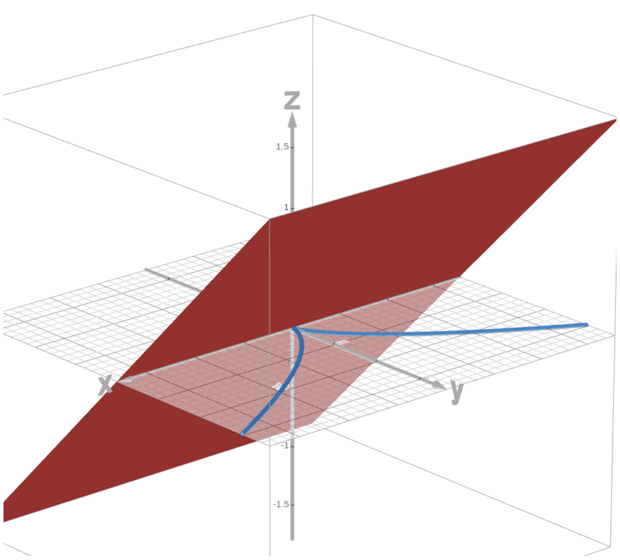
Le lagrangien est $F(x, y) = y - \lambda(y^3 - x^2)$. La résolution de $\nabla F(x, y, \lambda) = (0, 0, 0)$ conduit aux équations

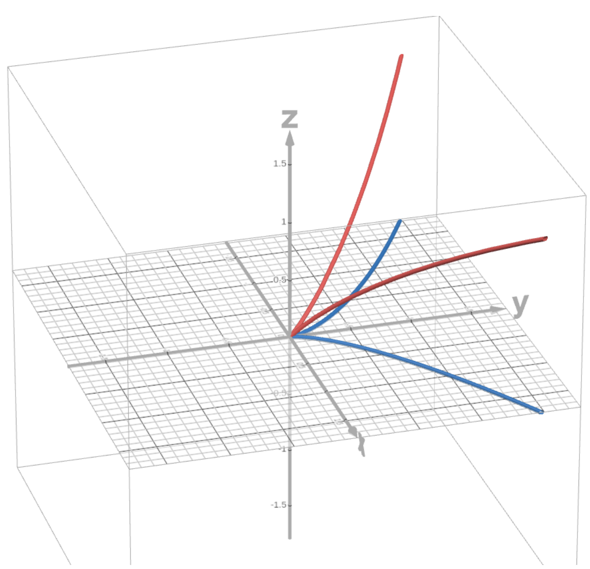
$$\begin{cases} 2\lambda x = 0 \\ 1 - 3\lambda y^2 = 0 \\ y^3 - x^2 = 0 \end{cases} \iff (x, y, \lambda) \in \emptyset$$

Il n'y a donc pas de points stationnaires de F. Pourtant, on peut vérifier que $(0, 0)$ est un minimum lié de f sous la contrainte $g(x, y) = 0$.

En effet, on a $g(x, y) = y^3 - x^2 = 0 \iff y = \sqrt[3]{x^2}$. Dès lors le minimum de $f(x, \sqrt[3]{x^2}) = \sqrt[3]{x^2}$ est atteint en $x = 0$.

Ci-dessous on représente la situation dans un repère $Oxyz$ (en rouge la fonction f, en bleu la contrainte $g = 0$)





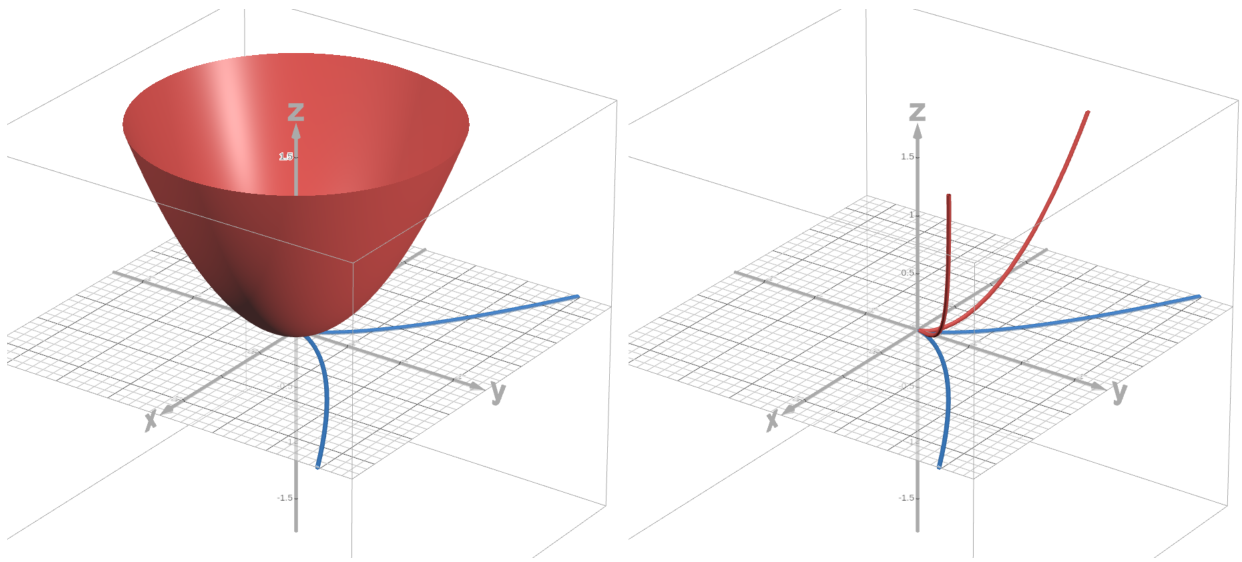
3 Cas $\nabla g(x_0) = 0$: x_0 est un extremum lié et un point stationnaire du lagangien

Soient $f(x, y) = x^2 + y^2$ et $g(x, y) = y^3 - x^2 = 0$. Comme avant, on observe que $\nabla g(x, y) = (-2x, 3y^2)$. On a donc $g(0, 0) = 0$ et $\nabla g(0, 0) = (0, 0)$.

Le lagrangien est $F(x, y) = x^2 + y^2 - \lambda(y^3 - x^2)$. La résolution de $\nabla F(x, y\lambda) = (0, 0, 0)$ conduit aux équations

$$\begin{cases} 2x(1+\lambda) = 0 \\ y(2 - 3\lambda y) = 0 \\ y^3 - x^2 = 0 \end{cases}$$

Observons qu'en particulier, le point $(0, 0, \lambda)$ est un point stationnaire du lagrangien pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ (ce n'est pas le seul point stationnaire cela dit). Dans ce cas, on observe aussi que $(0, 0)$ est un extremum lié (voir figure ci-dessous) . On a en effet $f(x, \sqrt[3]{x^2}) = x^2 + x^{4/3}$ dont $x = 0$ est un extremum.



4 Cas $\nabla g(x_0) = 0$: x_0 n'est pas un extremum lié mais un point stationnaire du lagrangien

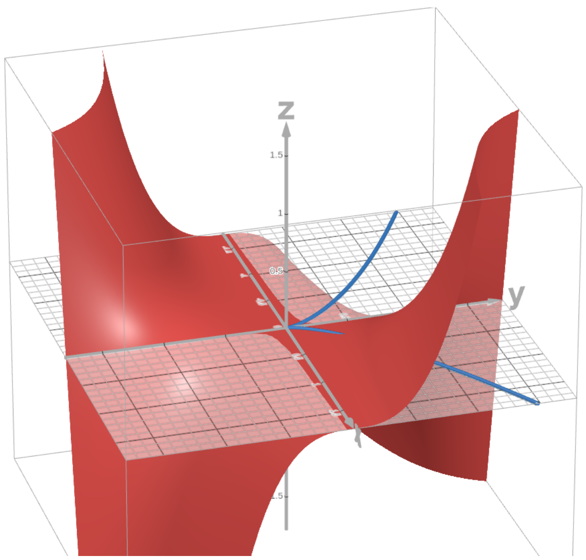
Soient $f(x, y) = xy^3$ et $g(x, y) = y^3 - x^2 = 0$. Comme avant, on observe que $\nabla g(x, y) = (-2x, 3y^2)$. On a donc $g(0, 0) = 0$ et $\nabla g(0, 0) = (0, 0)$.

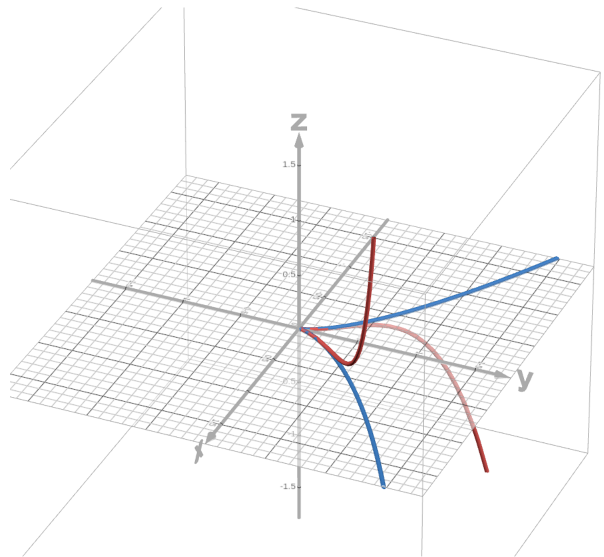
Ici le point $(0, 0)$ n'est pas un extremum lié de f sous la contrainte $g = 0$. En effet, pour $y = \sqrt[3]{x^2}$, on a $f(x, \sqrt[3]{x^2}) = x^3$. Or $x = 0$ n'est pas un extremum dans ce cas.

On calcule le langragien $F(x, y) = xy^3 - \lambda(y^3 - x^2)$. En résolvant $\nabla F(x, y\lambda) = (0, 0, 0)$, on obtient

$$\begin{cases} y^3 + 2x\lambda = 0 \\ 3y^2(x - \lambda) = 0 \\ y^3 - x^2 = 0 \end{cases}$$

On observe que $(0, 0, \lambda)$ est un point stationnaire de F pour tout λ, bien que $(0, 0)$ ne soit pas un extremum lié. Ci-dessous on représente la situation dans un repère $Oxyz$ (en rouge la fonction f, en bleu la contrainte $g = 0$)





5 Cas $\nabla g(x_0) = 0$: x_0 n'est pas un extremum lié ni un point stationnaire du lagrangien

Soient $f(x, y) = xy^3 + x$ et $g(x, y) = y^3 - x^2 = 0$. Comme avant, on observe que $\nabla g(x, y) = (-2x, 3y^2)$. On a donc $g(0, 0) = 0$ et $\nabla g(0, 0) = (0, 0)$.

Ici le point $(0, 0)$ n'est pas un extremum lié de f sous la contrainte $g = 0$. En effet, pour $y = \sqrt[3]{x^2}$, on a $f(x, \sqrt[3]{x^2}) = x^3 + x$. Or $x = 0$ n'est pas un extremum dans ce cas.

On calcule le langragien $F(x, y) = xy^3 + x - \lambda(y^3 - x^2)$. En résolvant $\nabla F(x, y\lambda) = (0, 0, 0)$, on obtient

$$\begin{cases} y^3 + 1 + 2x\lambda = 0 \\ 3y^2(x - \lambda) = 0 \\ y^3 - x^2 = 0 \end{cases}$$

On observe que pour $(x, y) = (0, 0)$, il n'existe aucun λ tel que $(0, 0, \lambda)$ est un point stationnaire de F.

Ci-dessous on représente la situation dans un repère $Oxyz$ (en rouge la fonction f, en bleu la contrainte $g = 0$)