

Exercice 1. (6 points)

On considère la fonction $f : [0; 2] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(2) = 0$ et $f(x) = 1$ pour tout $x < 2$.

Calculer l'intégrale $\int_0^2 f(x)dx$ en utilisant les sommes de Darboux.

Utiliser une subdivision quelconque et préciser les valeurs de $s_\sigma(f)$, $S_\sigma(f)$, $s(f)$ et $S(f)$.

On choisit une subdivision quelconque $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = 2$. Alors

$$\begin{aligned} s_\sigma(f) &= \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) = 1 \cdot (x_1 - x_0) + 1 \cdot (x_2 - x_1) + \dots + 0 \cdot (x_n - x_{n-1}) \\ &= x_{n-1} - x_0 = x_{n-1}; \\ S_\sigma(f) &= \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) = 1 \cdot (x_1 - x_0) + 1 \cdot (x_2 - x_1) + \dots + 1 \cdot (x_n - x_{n-1}) \\ &= x_n - x_0 = 2 - 0 = 2; \\ s(f) &= 2 \text{ et } S(f) = 2; \end{aligned}$$

car x_{n-1} peut être choisi arbitrairement proche de 2. Ainsi, $\int_0^2 f(x)dx = 2$.

Exercice 2. (3 points)

Enoncer le théorème de la moyenne.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Il existe alors un élément c de $[a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b - a).$$

Exercice 3. (5 points)

Calculer le réel $a > 0$ de façon que l'aire du domaine limité par les courbes $y = x^2$ et $y = ax$ soit égale à 36.

On commence par chercher les points d'intersection :

$$x^2 = ax \Leftrightarrow x^2 - ax = 0 \Leftrightarrow x(x - a) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } x = a.$$

Comme $ax > x^2$ si $x \in [0; a]$, l'aire du domaine est donné par

$$\int_0^a (ax - x^2) dx = \left[\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^a = \frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{6}a^3$$

Ainsi, on a $\frac{1}{6}a^3 = 36 \Leftrightarrow a^3 = 216 \Leftrightarrow a = 6$.

Exercice 4. (17 points)

Déterminer les primitives des fonctions suivantes.

a) $f(x) = 5x \cdot \sin(x^2) \Rightarrow F(x) = -\frac{5}{2} \cos(x^2) + c, c \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{3x^2+5}} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{4}(3x^2+5)^{\frac{2}{3}} + c, c \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 5}{x^3}$

Par la division euclidienne, on a $\frac{x^3 - 3x^2 - 5}{x^3} = 1 - \frac{3x^2 + 5}{x^3} = 1 - \frac{3}{x} - \frac{5}{x^3} = 1 - \frac{3}{x} - 5 \cdot x^{-3}$,
dont les primitives sont données par

$$F(x) = x - 3 \ln(|x|) + \frac{5}{2x^2} + c, c \in \mathbb{R}$$

d) $f(x) = \frac{4x - 1}{x^2 - 2x - 8}$

(décomposition en éléments simples)

On commence par décomposer en éléments simples la fraction :

$$\frac{4x - 1}{x^2 - 2x - 8} = \frac{4x - 1}{(x - 4)(x + 2)} = \frac{a}{x - 4} + \frac{b}{x + 2} = \frac{ax + 2a + bx - 4b}{(x - 4)(x + 2)}$$
$$\begin{cases} a + b = 4 \\ 2a - 4b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{2} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases}$$

On a donc $\frac{4x - 1}{x^2 - 2x - 8} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x - 4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x + 2}$, dont les primitives sont données par

$$F(x) = \frac{5}{2} \ln(|x - 4|) + \frac{3}{2} \ln(|x + 2|) + c, c \in \mathbb{R}.$$

e) $f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 - 4x + 8}$ (complétion de carré)

On a

$$\frac{2x + 1}{x^2 - 4x + 8} = \frac{2x + 1}{(x - 2)^2 + 4}$$

En posant $u = x - 2$, on obtient

$$\frac{2u + 5}{u^2 + 4} = \frac{2u}{u^2 + 4} + \frac{5}{u^2 + 4} = \frac{2u}{u^2 + 4} + \frac{5}{4} \frac{1}{\left(\frac{u}{2}\right)^2 + 1},$$

dont les primitives sont $\ln(|u^2 + 4|) + \frac{5}{4} \cdot 2 \arctan\left(\frac{u}{2}\right)$.

Ainsi, $F(x) = \ln(|x^2 - 4x + 8|) + \frac{5}{2} \arctan\left(\frac{x - 2}{2}\right) + c, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. (21 points)

a) Calculer l'intégrale suivante en appliquant un changement de variables : $\int_1^5 (x+2)\sqrt{2x-1} dx$

On pose $t = \sqrt{2x-1}$, donc $\varphi(t) = x = \frac{t^2+1}{2}$ et $\varphi'(t) = \frac{2t}{2} = t$. De plus, si $x \in [1; 5]$, alors $t \in [0; 3]$. On a donc

$$\begin{aligned} \int_1^5 (x+2)\sqrt{2x-1} dx &= \int_1^3 \frac{t^2+5}{2} \cdot t \cdot t dt = \int_1^3 \frac{t^4}{2} + \frac{5t^2}{2} dt = \left[\frac{t^5}{10} + \frac{5t^3}{6} \right]_1^3 \\ &= \frac{243}{10} + \frac{135}{6} - \frac{1}{10} - \frac{5}{6} = \frac{688}{15}. \end{aligned}$$

b) Calculer l'intégrale suivante par partie : $\int_0^{\pi/2} x \cos(x) dx$

On pose $u' = \cos(x)$, $u = \sin(x)$, $v = x$, $v' = 1$. On calcule

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} x \cos(x) dx &= [x \sin(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(x) dx = [x \sin(x) + \cos(x)]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot 1 + 0 - 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

c) Calculer l'intégrale suivante en appliquant le changement de variables $x = e^t$, puis en utilisant l'intégration par parties :

$$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2} dx$$

On pose $x = \varphi(t) = e^t$, donc $\varphi'(t) = e^t$. Si $x \in [1; e]$, alors $t \in [0; 1]$. On calcule alors

$$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2} dx = \int_0^1 \frac{t}{(e^t)^2} \cdot e^t dt = \int_0^1 \frac{t}{e^t} dt = \int_0^1 te^{-t} dt$$

On pose $u' = e^{-t}$, $u = -e^{-t}$, $v = t$, $v' = 1$ et on obtient

$$\begin{aligned} [-te^{-t}]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot (-e^{-t}) dt &= [-te^{-t}]_0^1 + \int_0^1 e^{-t} dt = [-te^{-t} - e^{-t}]_0^1 \\ &= -e^{-1} - e^{-1} - (0 - 1) = 1 - \frac{2}{e} \end{aligned}$$

d) Calculer, si possible, l'intégrale généralisée suivante : $\int_{-1}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2} dx &= \int_{-1}^{+\infty} x \cdot (x^2+1)^{-2} dx = \left[-\frac{1}{2(x^2+1)} \right]_{-1}^{+\infty} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{2(t^2+1)} \right) - \frac{-1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Exercice 6. (4 points)

Calculer la longueur de la courbe de la fonction $f(t) = \sinh(t)$ sur l'intervalle $[0; 1]$.

On a $f'(t) = \cosh(t)$ et $1 + f'(t)^2 = 1 + \cosh(t)^2 = \sinh(t)^2$. Comme le sinus hyperbolique est positif sur $[0; 1]$, la longueur de la courbe est égale à

$$\int_0^1 \sqrt{\sinh(t)^2} dt = \int_0^1 \sinh(t) dt = [\cosh(t)]_0^1 = \cosh(1).$$

Exercice 7. (7 points)

Déterminer le minimum global de la fonction $f(x) = \int_{e^x}^{e^{2x}} t^3 dt$.

On utilise la formule vue en cours :

$$f'(x) = (e^{2x})^3 \cdot e^{2x} \cdot 2 - (e^x)^3 \cdot e^x = 2e^{8x} - e^{4x} = e^{4x}(2e^{4x} - 1).$$

On a $f'(x) = 0$ si $e^{4x} = \frac{1}{2}$, donc $x_0 = \frac{-\ln(2)}{4}$ est un candidat. On calcule la dérivée seconde

$$f''(x) = 16e^{8x} - 4e^{4x} = 4e^{4x}(4e^{4x} - 1) \text{ et } f''(x_0) = 2$$

Ainsi, $x_0 = \frac{-\ln(2)}{4}$ est un minimum local de la fonction. C'est le minimum global car il n'y a pas d'autres candidats.