Corrigé série 24

Exercice 1 (20 points)

a) On a
$$\frac{1}{x^2+2x+5} = \frac{1}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}.$$
Les primitives sont donc
$$\frac{1}{2}\text{arctan}\left(\frac{x+1}{2}\right)+c.$$

b) On a
$$\frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8} = \frac{x^3-6}{(x^2+4)(x^2+2)} = \frac{ax+b}{x^2+4}+\frac{cx+d}{x^2+2}.$$
En mettant au même dénominateur et en comparant, on obtient le système d'équations
$$\begin{cases} a+c=1 \\ b+d=0 \\ 2a+4c=0 \\ 2b+4d=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \\ c=-1 \\ d=-3 \end{cases}$$
La décomposition en éléments simples est alors
$$\begin{aligned}\frac{2x+3}{x^2+4}-\frac{x+3}{x^2+2} &= \frac{2x}{x^2+4}+\frac{3}{x^2+4}-\frac{x}{x^2+2}-\frac{3}{x^2+2} \\ &= \frac{2x}{x^2+4}+\frac{3}{4}\frac{1}{(\frac{x}{2})^2+1}-\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+2}-\frac{3}{2}\frac{1}{(\frac{x}{\sqrt{2}})^2+1}\end{aligned}$$
Les primitives sont donc
$$\begin{aligned}&\ln\left(x^2+4\right)+\frac{3}{4}\cdot 2\text{arctan}\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\ln(x^2+2)-\frac{3}{2}\cdot\sqrt{2}\text{arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+c \\ &= \ln\left(x^2+4\right)+\frac{3}{2}\text{arctan}\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\ln(x^2+2)-\frac{3}{\sqrt{2}}\text{arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+c \\ &= \ln\left(\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}}\right)+\frac{3}{2}\text{arctan}\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{3}{\sqrt{2}}\text{arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+c.\end{aligned}$$

c) On a
$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}.$$
En mettant au même dénominateur et en comparant, on obtient le système d'équations
$$\begin{cases} a+b=0 \\ -a+b+c=0 \\ a+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1/3 \\ b=-1/3 \\ c=2/3 \end{cases}$$
La décomposition en éléments simples est alors $\dfrac{1}{3(x+1)} - \dfrac{1}{3}\dfrac{x-2}{x^2-x+1}$.

Une primitive de la première partie est donnée par $\dfrac{1}{3}\ln|x+1|$.

Pour la deuxième partie, on complète le carré, puis on fait le changement de variables $u = x - \dfrac{1}{2}$:
$$\frac{x-2}{x^2-x+1} = \frac{x-2}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{u-\frac{3}{2}}{u^2+\frac{3}{4}} = \frac{u}{u^2+\frac{3}{4}} - \frac{3}{2}\frac{1}{u^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\frac{2u}{u^2+\frac{3}{4}} - \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\frac{1}{(\frac{2u}{\sqrt{3}})^2+1}$$
Une primitive est donc
$$\frac{1}{2}\ln\left(u^2+\frac{3}{4}\right) - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right) - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$
Les primitives de $\dfrac{1}{x^3+1}$ sont donc
$$\frac{1}{3}\ln(|x+1|) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + c = \frac{\ln\left(\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right)}{6} + \frac{\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}} + c.$$

d) Après division euclidienne de x^5 par x^3-1, on obtient
$$\frac{x^5}{x^3-1} = x^2 + \frac{x^2}{x^3-1}$$
On peut directement trouver les primitives, qui sont
$$\frac{x^3}{3} + \frac{\ln|x^3-1|}{3} + c.$$
On aurait aussi pu passer par la décomposition en éléments simples, qui est
$$x^2 + \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{1}{3(x-1)}.$$
On obtiendrait alors les primitives
$$\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{3}\ln(x-1) = \frac{x^3}{3} + \frac{\ln|x^3-1|}{3} + c.$$

Exercice 2 (10 points)

a) La décomposition est
$$x - 2 + \frac{2}{x+1}.$$
Ainsi, l'intégrale vaut
$$\left[\frac{x^2}{2} - 2x + 2\ln(|x+1|)\right]_0^1 = 2\ln 2 - 1.5.$$

b) La décomposition est
$$\frac{1}{2x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2(x-2)}.$$
Ainsi, l'intégrale vaut
$$\left[\frac{1}{2}\ln(|x|) - \ln(|x-1|) + \frac{1}{2}\ln(|x-2|)\right]_{-2}^{-1} = 1.5\ln 3 - 2.5\ln 2.$$

c) La décomposition est
$$\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x+1}.$$
Ainsi, l'intégrale vaut
$$[3\ln(|x-2|) - 2\ln(|x+1|)]_3^6 = 10\ln 2 - 2\ln 7.$$

Exercice 3 (10 points)

a) On a $f'(x) = a$, donc $L(x) = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+a^2}dx = \sqrt{1+a^2}\int_0^1 1dx = \sqrt{1+a^2}$.

b) On suit l'exemple 1.2 des notes de cours et on obtient $\frac{R\pi}{2}$.

c) $L(x) = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+\sinh^2(t)}dt = \int_0^1 \cosh(t)dt = [\sinh(t)]_0^1 = \sinh 1$.

Exercice 4 (10 points)

a) Si f est une fonction réelle, alors l'expression $\sqrt{1+f'(x)^2}$ ne prend que des valeurs strictement positives. Ainsi, la longueur de la courbe sera toujours strictement positive, à part dans le cas trivial où les bornes d'intégration sont confondues.

b) Vrai.

c) Faux. L'écriture correcte est $1 - \frac{2}{1+x}$.

d) Vrai.

e) Vrai.

Exercice 5 (10 points)

a) Avec le changement de variables $\varphi(t) = \ln(t)$, on a

$$\int_0^1 \frac{1}{2\cosh x + 2\sinh x + 1}\,\mathrm{d}x = \int_1^e \frac{1}{\frac{t^2+1}{t} + \frac{t^2-1}{t} + 1} \cdot \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^e \frac{1}{2t^2+t}\,\mathrm{d}t.$$

Avec la décomposition en éléments simples, on a

$$\frac{1}{2t^2+t} = \frac{1}{t} - \frac{2}{2t+1}.$$

L'intégrale est donc égale à

$$(\ln t)\big|_1^e - (\ln(2t+1))\big|_1^e = 1 + \ln(3) - \ln(2e+1).$$

b) Avec le changement de variables $\varphi(t) = 1 + \sin(t)$, on a

$$\int_1^2 \frac{1}{1+\sqrt{2x-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sqrt{1-\sin(t)^2}} \cdot \cos(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos(t)} \cdot \cos(t)\,\mathrm{d}t.$$

En utilisant ensuite le changement de variables $\varphi(s) = 2\arctan(s)$, on remarque que $\cos(t)$ se transfome en $\dfrac{1-s^2}{1+s^2}$, donc l'intégrale est égale à

$$\int_0^1 \frac{1}{1+\frac{1-s^2}{1+s^2}} \cdot \frac{1-s^2}{1+s^2} \cdot \frac{2}{1+s^2}\,\mathrm{d}s = \int_0^1 \frac{1-s^2}{1+s^2}\,\mathrm{d}s = \int_0^1 -1 + \frac{2}{1+s^2}\,\mathrm{d}s$$
$$= (-s)\big|_0^1 + (2\arctan(s))\big|_0^1 = -1 + \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 6 (10 points)

a) En utilisant que $\sin^2(t) = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$ et l'intégration par parties, on trouve

$$\int_0^x t\sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x t \cdot \frac{1-\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^x t\cos(2t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \left(\frac{1}{4}t^2\right)\Big|_0^x - \frac{1}{2}\left(\left(t \cdot \frac{1}{2}\sin(2t)\right)\Big|_0^x - \int_0^x \frac{1}{2}\sin(2t)\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\sin(2x) + \frac{1}{4}\int_0^x \sin(2t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\sin(2x) + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\cos(2t)\right)\Big|_0^x = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\sin(2x) - \frac{1}{8}\cos(2x) + \frac{1}{8}$$
$$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x\sin(x)\cos(x) - \frac{1}{8}(1-2\sin^2(x)) + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x\sin(x)\cos(x) + \frac{1}{4}\sin^2(x)$$

b) Avec le changement de variables $s = \sqrt{t+1}$, on trouve $\varphi(s) = t = s^2 - 1$, $\varphi'(s) = 2s$ et si $t \in [0; x]$, alors $s \in [1; \sqrt{x+1}]$. On a donc, en faisant une intégration par parties,

$$\int_0^x e^{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\sqrt{x+1}} e^s \cdot 2s\,\mathrm{d}s = (2s \cdot e^s)\big|_1^{\sqrt{x+1}} - \int_1^{\sqrt{x+1}} 2e^s\,\mathrm{d}s$$
$$= (2s \cdot e^s - 2e^s)\big|_1^{\sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x+1}e^{\sqrt{x+1}} - 2e^{\sqrt{x+1}} - (2e - 2e)$$
$$= 2e^{\sqrt{x+1}}(\sqrt{x+1} - 1)$$

c) Avec le changement de variables $s = \tan\frac{t}{2}$, on trouve $\varphi(s) = t = 2\arctan(s)$, $\varphi'(s) = \dfrac{2}{s^2+1}$ et si $t \in [0; x]$, alors $s \in [0; \tan(\frac{x}{2})]$. De plus, on remarque que $\cos(t)$ se transforme en $\dfrac{1-s^2}{1+s^2}$. On a donc

$$\int_0^x \frac{1}{2+\cos(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\tan(\frac{x}{2})} \frac{1}{2+\frac{1-s^2}{1+s^2}} \cdot \frac{2}{s^2+1}\,\mathrm{d}s = \int_0^{\tan(\frac{x}{2})} \frac{1}{\frac{3+s^2}{1+s^2}} \cdot \frac{2}{s^2+1}\,\mathrm{d}s$$
$$= \int_0^{\tan(\frac{x}{2})} \frac{2}{3+s^2}\,\mathrm{d}s = \frac{2}{3}\int_0^{\tan(\frac{x}{2})} \frac{1}{(\frac{s}{\sqrt{3}})^2+1}\,\mathrm{d}s = \frac{2}{3}\left(\sqrt{3}\arctan\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right)\right)\Big|_0^{\tan(\frac{x}{2})}$$
$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\tan(\frac{x}{2})}{\sqrt{3}}\right)$$

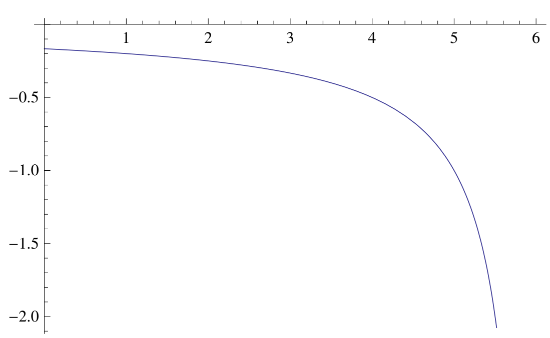
Exercice 7 (10 points)

a) Si $d > b$, on a $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x-d}\,\mathrm{d}x = (\ln(d-x))\big|_a^b = \ln\frac{d-b}{d-a}$.

Pour $d < a$, on trouve la même réponse.

b) On calcule, pour $n \geq 2$, $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(x-d)^n}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{(x-d)^{1-n}}{1-n}\right)\Big|_a^b = \frac{(b-d)^{1-n} - (a-d)^{1-n}}{1-n}$.

c) Comme f est négative sur l'intervalle considéré, l'intégrale est négative ; elle vaut $-\ln(1+e)$. Ainsi, l'aire géométrique vaut $|-\ln(1+e)| = \ln(1+e)$.



Exercice 8 (10 points)

a) On a
$$\overrightarrow{\varphi(x_{i-1})\varphi(x_i)} = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_i) - \varphi_1(x_{i-1}) \\ \varphi_2(x_i) - \varphi_2(x_{i-1}) \end{pmatrix}.$$
Ainsi,
$$\left|\left|\overrightarrow{\varphi(x_{i-1})\varphi(x_i)}\right|\right|^2 = (\varphi_1(x_i) - \varphi_1(x_{i-1}))^2 + (\varphi_2(x_i) - \varphi_2(x_{i-1}))^2.$$

b) On applique le théorème des accroissements finis pour obtenir l'existence de c_i et de d_i tels que
$$\varphi_1(x_i) - \varphi_1(x_{i-1}) = \frac{b-a}{n}\varphi_1'(c_i), \quad \text{et}$$
$$\varphi_2(x_i) - \varphi_2(x_{i-1}) = \frac{b-a}{n}\varphi_2'(d_i).$$
La propriété suit alors directement en utilisant ces deux équations et l'égalité obtenue plus haut.

c) La fonction $f(t)$ est intégrable sur $[a, b]$ car elle est continue sur cet intervalle.

d) Cela découle des points précédents.

e) On trouve bien évidemment $2\pi r$.

f) Faux. L'intégrale vaut 2π dans les deux cas.

g) On calcule
$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2}\sin(2t)\,\mathrm{d}t = 6.$$

h) On calcule
$$\int_{-\pi}^{\pi} |2\cos(t/2)|\,\mathrm{d}t = 4\int_0^{\pi}\cos(t/2)\,\mathrm{d}t = 8\,(\sin(t/2))\big|_0^{\pi} = 8.$$